東工大 2012前期 ③

(1) $x^3-3x^2+2x=ax$. $x^2-3x-a+2=0$ —① が $x=0$ 以外の解を持てばよい

①が $x=0$ を解に持つとき $a=2$ このとき ①は $x(x-3)=0$ となるから 解は $x=0, 3$

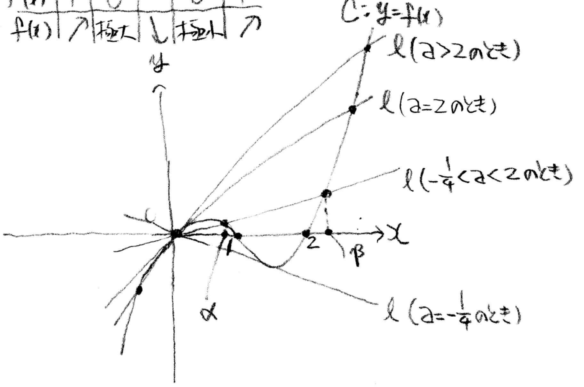
$a\neq 2$ のとき ①は $x=0$ を解に持たない. このとき $9-4(-a+2)\geqq 0$. $4a+1\geqq 0$. $a\geqq -\frac{1}{4}$ のとき 解を持つ.

以上より $a\geqq -\frac{1}{4}$

(2) $f(x)=x^3-3x^2+2x$ とする. $f'(x)=3x^2-6x+2$. $f'(x)=0$ のとき $x=\frac{3\pm\sqrt{9-6}}{3}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{3}$

x	…	$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$	…	$\frac{3+\sqrt{3}}{3}$	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$f(x)$の増減表は左表



$f(x)$のグラフは左図.

$a>2$のとき 左図より $S(a)>S(2)$ より $-\frac{1}{4}\leqq a\leqq 2$ として考えてよい

Cとlの交点のx座標を $0, \alpha, \beta$ $(0\leqq\alpha\leqq\beta)$ とする

$x^3-3x^2+2x-ax=x(x-\alpha)(x-\beta)=(x-\alpha+\alpha)(x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}$

$=(x-\alpha)^3+\{\alpha-(\beta-\alpha)\}(x-\alpha)^2-\alpha(\beta-\alpha)(x-\alpha)$ より

$S(a)=\int_0^\alpha(x^3-3x^2+2x-ax)dx+\int_\alpha^\beta\{ax-(x^3-3x^2+2x)\}dx$

$=\left[\frac{(x-\alpha)^4}{4}+(2\alpha-\beta)\frac{(x-\alpha)^3}{3}-\alpha(\beta-\alpha)\frac{(x-\alpha)^2}{2}\right]_0^\alpha+\left[-\frac{(x-\alpha)^4}{4}-(2\alpha-\beta)\frac{(x-\alpha)^3}{3}+\alpha(\beta-\alpha)\frac{(x-\alpha)^2}{2}\right]_\alpha^\beta$

$=-\frac{\alpha^4}{4}+(2\alpha-\beta)\frac{\alpha^3}{3}+\alpha(\beta-\alpha)\frac{\alpha^2}{2}-\frac{(\beta-\alpha)^4}{4}-(2\alpha-\beta)\frac{(\beta-\alpha)^3}{3}+\alpha(\beta-\alpha)\frac{(\beta-\alpha)^2}{2}$

$=-\frac{\alpha^4}{4}+\frac{4\alpha-2\beta+3\beta-3\alpha}{6}\alpha^3-\frac{(\beta-\alpha)^4}{4}+\frac{-4\alpha+2\beta+3\alpha}{6}(\beta-\alpha)^3$

$=-\frac{\alpha^4}{4}+\frac{\alpha+\beta}{6}\alpha^3-\frac{(\beta-\alpha)^4}{4}+\frac{2(\alpha+\beta)-3\alpha}{6}(\beta-\alpha)^3$

※ $f(x)=0$のとき $(x^2-3x+2)x=0$

$(x-2)(x-1)x=0$ $x=0, 1, 2$

$f'(0)=2$.

ここで α, β は①の解であるから $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-a+2$

$S(a)=-\frac{\alpha^4}{4}+\frac{1}{2}\alpha^3-\frac{(\beta-\alpha)^4}{4}+\left(1-\frac{1}{2}\alpha\right)(\beta-\alpha)^3=\left(-\frac{1}{4}\alpha+\frac{1}{2}\right)\alpha^3+\left(-\frac{1}{4}\beta+\frac{1}{4}\alpha+1-\frac{1}{2}\alpha\right)(\beta-\alpha)^3$

$=\frac{-\alpha+2}{4}\alpha^3+\left\{-\frac{1}{4}(\alpha+\beta)+1\right\}(\beta-\alpha)^3=\frac{-\alpha+2}{4}\alpha^3+\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{4}(-\alpha^4+2\alpha^3+\beta^3-3\beta^2\alpha+3\beta\alpha^2-\alpha^3)$

$=\frac{1}{4}(\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3-6\alpha\beta^2-\alpha^4)=\frac{1}{4}\{(\alpha+\beta)^3-6(-a+2)\beta-\alpha^4\}$

①の解は $x=\frac{3\pm\sqrt{9-4(-a+2)}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{4a+1}}{2}$. $\alpha=\frac{3-\sqrt{4a+1}}{2}$ $\beta=\frac{3+\sqrt{4a+1}}{2}$

$\alpha^2=\frac{9-6\sqrt{4a+1}+4a+1}{4}=\frac{2a+5-3\sqrt{4a+1}}{2}$ $\alpha^4=\frac{4a^2+20a+25-6(2a+5)\sqrt{4a+1}+36a+9}{4}$

$=\frac{4a^2+56a+34+(-12a-30)\sqrt{4a+1}}{4}=\frac{2a^2+28a+17+(-6a-15)\sqrt{4a+1}}{2}$

よって $S(a)=\frac{1}{4}\left\{27-3(-a+2)(3+\sqrt{4a+1})-a^2-14a-\frac{17}{2}+\left(3a+\frac{15}{2}\right)\sqrt{4a+1}\right\}$

$=\frac{1}{4}\left\{-a^2-14a+\frac{37}{2}+9a-18+\left(3a-6+3a+\frac{15}{2}\right)\sqrt{4a+1}\right\}=\frac{1}{4}\left\{-a^2-5a+\frac{1}{2}+\left(6a+\frac{3}{2}\right)\sqrt{4a+1}\right\}$

$=\frac{1}{4}\left\{-a^2-5a+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(4a+1)^{\frac{3}{2}}\right\}=\frac{1}{8}\left\{-2a^2-10a+1+3(4a+1)^{\frac{3}{2}}\right\}$

$S'(a)=\frac{1}{8}\left(-4a-10+3\cdot\frac{3}{2}\sqrt{4a+1}\cdot 4\right)=\frac{1}{4}(-2a-5+9\sqrt{4a+1})$

$S'(a)=0$のとき $2a+5=9\sqrt{4a+1}$. $4a^2+20a+25=324a+81$

$4a^2-304a-56=0$ $a^2-76a-14=0$ $a=38\pm\sqrt{1444+14}=38\pm27\sqrt{2}$

$-\frac{1}{4}<-0.205=38-27\times1.415<38-27\sqrt{2}<38-27\times1.41=-0.07<2$

より. $a=38-27\sqrt{2}$.

a	$-\frac{1}{4}$	…	$38-27\sqrt{2}$	…	2
$S'(a)$	−	−	0	+	+
$S(a)$		↘		↗	

$S(a)$の増減表は左表. よって $a=38-27\sqrt{2}$ のとき $S(a)$は最小となる

1.41×27: 987, 282, 38.07

1.415×27: 9905, 2830, 38.205

38×38: 304, 114, 1444

2 | 1458, 3 | 729, 3 | 243, 3 | 81, 3 | 27, 3 | 9, 3