東工大　2012前期 ⑤

(1) Pの座標を (p_x, p_y) とすると. $OP=\sqrt{p_x^2+p_y^2}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ap_x+bp_y \\ cp_x+dp_y \end{pmatrix}$ より $OP'=\sqrt{a^2p_x^2+2abp_xp_y+b^2p_y^2+c^2p_x^2+2cdp_xp_y+d^2p_y^2}=\sqrt{(a^2+c^2)p_x^2+2(ab+cd)p_xp_y+(b^2+d^2)p_y^2}$

$\dfrac{OP'}{OP}=\sqrt{\dfrac{(a^2+c^2)p_x^2+2(ab+cd)p_xp_y+(b^2+d^2)p_y^2}{p_x^2+p_y^2}}$ ―①

Qの座標を (q_x, q_y) とすると. 同様にして $\dfrac{OQ'}{OQ}=\sqrt{\dfrac{(a^2+c^2)q_x^2+2(ab+cd)q_xq_y+(b^2+d^2)q_y^2}{q_x^2+q_y^2}}$ ―②

P. Qの座標を $(1, 0)$. $(0, 1)$ とすると ①は $\sqrt{a^2+c^2}$ ―①′. ②は $\sqrt{b^2+d^2}$ ―②′ となる

①′=②′より $a^2+c^2=b^2+d^2$. すなわち. Aが問の条件を満たすためには $a^2+c^2=b^2+d^2$ でなければならない

(2) Xを実数として. $a^2+c^2=b^2+d^2=X$ とする.

①は $\sqrt{\dfrac{X(p_x^2+p_y^2)+2(ab+cd)p_xp_y}{p_x^2+p_y^2}}$ ―③. ②は $\sqrt{\dfrac{X(q_x^2+q_y^2)+2(ab+cd)q_xq_y}{q_x^2+q_y^2}}$ ―④ となる

P. Qの座標を $(1, 1)$. $(1, -1)$ とすると ③は $\sqrt{\dfrac{2X+2(ab+cd)}{2}}=\sqrt{X+ab+cd}$ ―③′

④は $\sqrt{\dfrac{2X-2(ab+cd)}{2}}=\sqrt{X-(ab+cd)}$ ―④′ となる

③′=④′より $X+ab+cd=X-(ab+cd)$　$ab+cd=0$

すなわち. Aが問の条件を満たすためには $ab+cd=0$ でなければならない.

$a^2+c^2=b^2+d^2=X$, $ab+cd=0$ のとき ①は $\sqrt{\dfrac{X(p_x^2+p_y^2)}{p_x^2+p_y^2}}=\sqrt{X}$, ②は $\sqrt{\dfrac{X(q_x^2+q_y^2)}{q_x^2+q_y^2}}=\sqrt{X}$ より ①=②

以上より $a^2+c^2=b^2+d^2$ ―⑤, $ab+cd=0$ ―⑥

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ より $\begin{matrix} a+\sqrt{3}b=-4 \\ c+\sqrt{3}d=0 \end{matrix}$　$\begin{matrix} a=-\sqrt{3}b-4 \\ c=-\sqrt{3}d \end{matrix}$

⑤より $3b^2+8\sqrt{3}b+16+3d^2=b^2+d^2$　$2b^2+8\sqrt{3}b+16+2d^2=0$. $b^2+4\sqrt{3}b+8+d^2=0$

⑥より $(-\sqrt{3}b-4)b-\sqrt{3}d^2=0$. $-\sqrt{3}b^2-4b-\sqrt{3}d^2=0$. $3b^2+4\sqrt{3}b+3d^2=0$

$-4\sqrt{3}b+12\sqrt{3}b+24=0$　$8\sqrt{3}b=-24$　$b=-\sqrt{3}$, $a=3-4=-1$

$3-12+8+d^2=0$　$d=\pm 1$　$c=\mp\sqrt{3}$

以上より $A=\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \pm\sqrt{3} & \mp 1 \end{pmatrix}$