

2  $n$  を 2 以上の整数とする .

(1)  $n - 1$  次多項式  $P_n(x)$  と  $n$  次多項式  $Q_n(x)$  ですべての実数  $\theta$  に対して

$$\sin(2n\theta) = n \sin(2\theta)P_n(\sin^2 \theta), \quad \cos(2n\theta) = Q_n(\sin^2 \theta)$$

を満たすものが存在することを帰納法を用いて示せ .

(2)  $k = 1, 2, \dots, n - 1$  に対して  $\alpha_k = \left(\sin \frac{k\pi}{2n}\right)^{-2}$  とおくと

$$P_n(x) = (1 - \alpha_1 x)(1 - \alpha_2 x) \cdots (1 - \alpha_{n-1} x)$$

となることを示せ .

(3)  $\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k = \frac{2n^2 - 2}{3}$  を示せ .