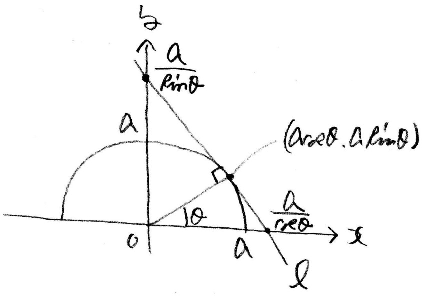
東大理科　1961前期　③



左図のように xy座標, θ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$, l をとる

lの方程式は $y-a\sin\theta=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(x-a\cos\theta)$

lとx軸の交点のx座標が円錐の底面の半径になり

この値は $-a\sin\theta=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(x-a\cos\theta)$　$\frac{a\sin^2\theta}{\cos\theta}=x-a\cos\theta$

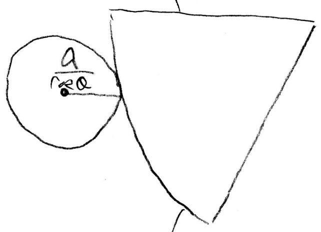
$x=a\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}+\cos\theta\right)$, $x=\frac{a}{\cos\theta}$ より $\frac{a}{\cos\theta}$

lとy軸との交点のy座標が円錐の高さになり

この値は $y-a\sin\theta=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(-a\cos\theta)$, $y-a\sin\theta=a\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$

$y=a\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}+\sin\theta\right)$, $y=\frac{a}{\sin\theta}$ より $\frac{a}{\sin\theta}$

$\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2\theta}+\frac{a^2}{\sin^2\theta}}=a\sqrt{\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta\sin^2\theta}}=\frac{a}{\cos\theta\sin\theta}$



弧の長さ $\frac{2\pi a}{\cos\theta}$

円錐の表面積は $\frac{\pi a^2}{\cos^2\theta}+\frac{\frac{2\pi a}{\cos\theta}}{\frac{2\pi a}{\cos\theta\sin\theta}}\frac{\pi a^2}{\cos^2\theta\sin^2\theta}$

$=\pi a^2\left(\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta\sin\theta}\right)=\pi a^2\frac{\cancel{1+\sin\theta}}{\cancel{(1+\sin\theta)}(1-\sin\theta)\sin\theta}$

$=\frac{\pi a^2}{-(\sin^2\theta-\sin\theta+\frac{1}{4})+\frac{1}{4}}=\frac{\pi a^2}{-(\sin\theta-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}$

よって円錐の表面積は $\sin\theta=\frac{1}{2}$ のとき最小値をとる.

このときの円錐の高さは $2a$ であるから, 求める値は $2a$