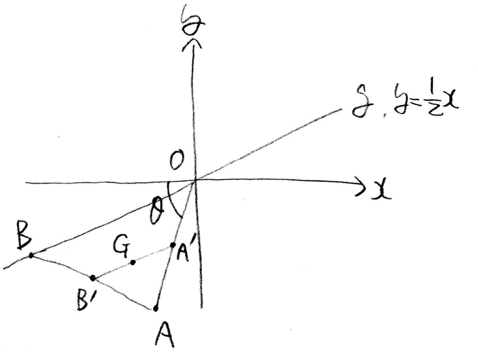
東大理科　1962前期　③



左図のようにxy平面をとる.

ℓの方程式は $y=\frac{1}{2}x$

OA, OBの長さを1とする.

Aの座標は $(-\cos\theta, -\sin\theta)$

中心A, 半径1の円は, 方程式が $(x+\cos\theta)^2+(y+\sin\theta)^2=1$

これと, ℓの O以外の交点は

$x^2+2x\cos\theta+\cos^2\theta+\frac{1}{4}x^2+\sin\theta\cdot x+\sin^2\theta=1$, $\left(\frac{5}{4}x+2\cos\theta+\sin\theta\right)x=0$.

$x\neq0$より $x=-\frac{8}{5}\cos\theta-\frac{4}{5}\sin\theta$, $y=-\frac{4}{5}\cos\theta-\frac{2}{5}\sin\theta$ より

$\left(-\frac{8}{5}\cos\theta-\frac{4}{5}\sin\theta, -\frac{4}{5}\cos\theta-\frac{2}{5}\sin\theta\right)$ であり,

これがBの座標である.

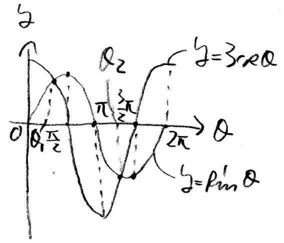
OA, ABの中点をA', B'とすると

$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$

Gのy座標は $-\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{1}{5}\cos\theta-\frac{1}{10}\sin\theta=-\frac{3}{5}\sin\theta-\frac{1}{5}\cos\theta$.

$f(\theta)=-\frac{3}{5}\sin\theta-\frac{1}{5}\cos\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ を考える.

$f'(\theta)=-\frac{3}{5}\cos\theta+\frac{1}{5}\sin\theta$. $f'(\theta)=0$のとき $\sin\theta=3\cos\theta$.



$\sin\theta=3\cos\theta$ を満たす θを θ_1, θ_2 $(\theta_1<\theta_2)$ とおく

θ	$\cdots$	θ_1	$\cdots$	θ_2	$\cdots$
$f'(\theta)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(\theta)$	↘	最小	↗	最大	↘

$f(\theta)$の増減表は左表のようになる.

$f(\theta)$が最小値をとるとき $\tan\theta=3$ である.

よって求める $\tan\theta$ の値は 3.