



OA, OB, OC, OD の長さを x, y, z, d とする。

$$a^2 = y^2 + z^2, \quad b^2 = z^2 + x^2, \quad c^2 = x^2 + y^2, \quad d^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\therefore z^2 d^2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad d = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}$$

$$a=5, b=3 \text{ のとき } \begin{cases} x^2 + y^2 = c^2 & 2x^2 + 25 = c^2 + 9 & 2x^2 = c^2 - 16 & x^2 = \frac{1}{2}c^2 - 8 \\ y^2 + z^2 = 25 & \text{かつ} & y^2 = -x^2 + c^2 = -\frac{1}{2}c^2 + 8 + c^2 = \frac{1}{2}c^2 + 8 \\ x^2 + z^2 = 9 & & z^2 = -x^2 + 9 = -\frac{1}{2}c^2 + 8 + 9 = -\frac{1}{2}c^2 + 17 \end{cases}$$

$x^2 > 0$ かつ $y^2 > 0$ かつ $z^2 > 0$. $c^2 > 16$ かつ $c^2 > 8$ かつ $c^2 < 34$.

$$x^2 > 0 \text{ かつ } \frac{1}{2}c^2 - 8 > 0, \quad c^2 > 16, \quad c > 4.$$

$$z^2 > 0 \text{ かつ } -\frac{1}{2}c^2 + 17 > 0, \quad c^2 < 34, \quad c < \sqrt{34}.$$

$$\therefore 4 < c < \sqrt{34}.$$