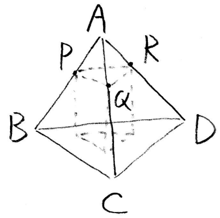
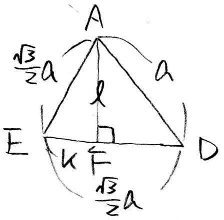
東大理科　1963前期　④





BCの中点をE、Aから面BCDに下ろした垂線の足をF

EF=k，AF=l とすると 左図より

$$\begin{cases} k^2+l^2=\frac{3}{4}a^2 \\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a-k\right)^2+l^2=a^2 \end{cases}$$

$\cancel{k^2}-\sqrt{3}ak+\frac{3}{4}a^2-\cancel{k^2}+\frac{3}{4}a^2=a^2$

$\sqrt{3}k=\frac{1}{2}a$，$k=\frac{\sqrt{3}}{6}a$，

$l^2=-\frac{1}{12}a^2+\frac{3}{4}a^2=\frac{2}{3}a^2$，$l=\frac{\sqrt{6}}{3}a$

AP=AQ=AR=αa とする。△APQは正三角形であるから、PQ=αa

PQの中点をSとする。△PQRは正三角形であるから RS=$\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha a$

三角柱の高さを h とすると $\frac{h}{l}=\frac{a-\alpha a}{a}$，$h=(1-\alpha)\frac{\sqrt{6}}{3}a$

三角柱の体積は $\frac{1}{2}\alpha a\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha a(1-\alpha)\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{3\sqrt{2}}{12}a^3(-\alpha^3+\alpha^2)$

$f(\alpha)=-\alpha^3+\alpha^2$ とおくと、$f'(\alpha)=-3\alpha^2+2\alpha$，$f'(\alpha)=0$ のとき $\alpha=0,\frac{2}{3}$

α	…	0	…	$\frac{2}{3}$	…
$f'(\alpha)$	−	0	+	0	−
$f(\alpha)$	↘	0	↗	$\frac{4}{27}$	↘

$f(\alpha)$の増減表は左表のようになる。

$f(\alpha)$ は $\alpha=\frac{2}{3}$のとき 最大値 $\frac{4}{27}$ をとる。

$f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{8}{27}+\frac{4}{9}=\frac{-8+12}{27}=\frac{4}{27}$

よって $AP=\frac{2}{3}a$

$$V_0=\frac{3\sqrt{2}}{12}a^3\frac{4}{27}=\frac{\sqrt{2}}{27}a^3$$

$$V=\frac{1}{3}\frac{1}{2}a\frac{\sqrt{3}}{2}a\frac{\sqrt{6}}{3}a=\frac{3\sqrt{2}}{36}a^3=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

$$\frac{V_0}{V}=\frac{\frac{1}{27}}{\frac{1}{12}}=\frac{12}{27}=\frac{4}{9}$$