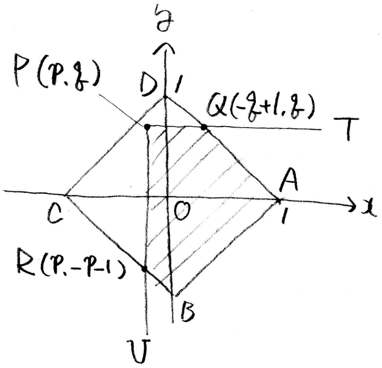
東大理科　1963前期　⑤



$x+y=1$, $y=q$ のとき $x=-q+1$
$x+y=-1$, $x=p$ のとき $y=-p-1$

ABCDを $\frac{\sqrt{2}}{a}$ 倍したものを考え、左図のようにxy座標をとる.

Pの座標を (p, q) とする.

Qの座標は $(-q+1, q)$

PUとBCの交点Rの座標は $(p, -p-1)$

斜線部の面積が1となればよいから

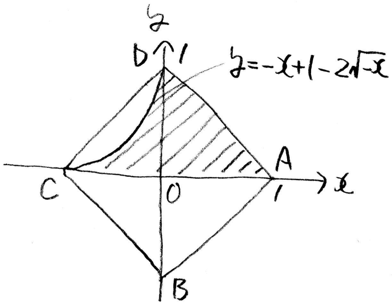
$$\frac{1}{2}(1-p-q+1-p)q+\frac{1}{2}(1+p+1)(-p)+\frac{1}{2}=1$$

$$(-2p-q+2)q-(p+2)p+1=2$$

$$-2pq-q^2+2q-p^2-2p+1=2$$

$$q^2+2(p-1)q+p^2+2p+1=0.$$

$$q=-p+1\pm\sqrt{p^2-2p+1-p^2-2p-1}=-p+1\pm2\sqrt{-p}$$



よってPQの通過する部分は左図の斜線部であり、この面積は

$$\int_0^1(x+1-2\sqrt{x})dx+\frac{1}{2}=\left[\frac{x^2}{2}+x-2\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}+1-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$$

求める面積は $\frac{2}{3}\cdot\frac{a^2}{2}=\frac{1}{3}a^2$