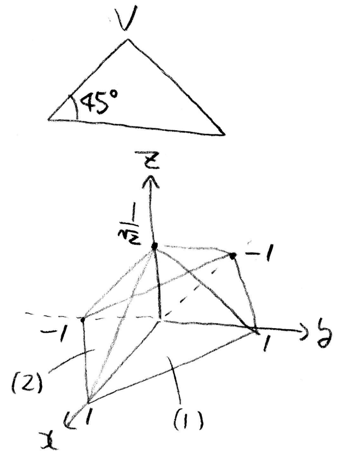
東大理科　1968前期　(2)



左図のように xyz 座標をとり
頂点が $(1,0,0),(0,1,0),(-1,0,0),(0,-1,0)$ の正方形を底面とし、
$(0,0,\frac{1}{\sqrt{2}})$ を頂点とする正四角錐を考えると、
これの底面と斜面のなす二面角は $45°$ である。

$(1,0,0),(0,1,0),(0,0,\frac{1}{\sqrt{2}})$ を通る平面 $\underbrace{}_{(1)}$ の方程式は $x+y+\sqrt{2}z=1$, $x-1+y+\sqrt{2}z=0$
であるから、これの法線ベクトルは $(1,1,\sqrt{2})$ ―①

$(1,0,0),(0,-1,0),(0,0,\frac{1}{\sqrt{2}})$ を通る平面 $\underbrace{}_{(2)}$ の方程式は $x-y+\sqrt{2}z=1$, $x-1-y+\sqrt{2}z=0$
であるから、これの法線ベクトルは $(1,-1,\sqrt{2})$ ―②

$(-1,0,\frac{1}{\sqrt{2}})$ に垂直な平面 $\underbrace{}_{(3)}$ の法線ベクトルは $(-\sqrt{2},0,1)$ ―③

(1),(3)の交線の方向ベクトルは、①③の両方に垂直であるから $(1,1,\sqrt{2})\times(-\sqrt{2},0,1)=(1,-3,\sqrt{2})$ ―④
(2),(3)の交線の方向ベクトルは②③の両方に垂直であるから $(1,-1,\sqrt{2})\times(-\sqrt{2},0,1)=(-1,-3,-\sqrt{2})$ ―⑤

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & -2-1 & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & -1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 & -2-1 & \end{array}$$

④⑤のなす角を θ とすると、$\cos\theta=\frac{(1,-3,\sqrt{2})\cdot(-1,-3,-\sqrt{2})}{|(1,-3,\sqrt{2})||(-1,-3,-\sqrt{2})|}=\frac{-1+9-2}{1+9+2}=\frac{1}{2}$　$\theta=60°$

よって、求める角度は $60°$ か $120°$ であるが、求める角度は明らかに $90°$ 以上であるので、求める角度は $120°$