東大理科　1968前期　③

$f(x)=ax^2+bx-a-b=a(x^2-1)+b(x-1)$

$\begin{pmatrix} f(\alpha) \\ f(\beta) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a(\alpha^2-1)+b(\alpha-1) \\ a(\beta^2-1)+b(\beta-1) \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} \alpha^2-1 \\ \beta^2-1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} \alpha-1 \\ \beta-1 \end{pmatrix}$

$(\alpha^2-1,\ \beta^2-1)$, $(\alpha-1,\ \beta-1)$が1次独立であるためには

$(0,0)$, $(\alpha^2-1,\ \beta^2-1)$, $(\alpha-1,\ \beta-1)$を頂点とする三角形の面積

$\frac{1}{2}|(\alpha^2-1)(\beta-1)-(\beta^2-1)(\alpha-1)|=\frac{1}{2}|(\alpha-1)(\beta-1)(\alpha+1)-(\alpha-1)(\beta-1)(\beta+1)|=\frac{1}{2}|(\alpha-1)(\beta-1)(\alpha-\beta)|$が$0$でなければよい.

(i) $\alpha\neq1$, $\beta\neq1$, $\alpha\neq\beta$のとき

$a\neq0$でなければならないから, $(f(\alpha),f(\beta))$は$y=\frac{\beta-1}{\alpha-1}x$上にはない.

$(f(\alpha),f(\beta))$はこれ以外の平面上の任意の点をとる.

(ii) $\alpha=1$, $\beta\neq1$のとき

$\begin{pmatrix} f(\alpha) \\ f(\beta) \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 0 \\ \beta^2-1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 \\ \beta-1 \end{pmatrix}=(\beta-1)\{a(\beta+1)+b\}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(f(\alpha),f(\beta))$はy軸上の任意の点をとる.

(iii) $\alpha\neq1$, $\beta=1$のとき

$\begin{pmatrix} f(\alpha) \\ f(\beta) \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} \alpha^2-1 \\ 0 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} \alpha-1 \\ 0 \end{pmatrix}=(\alpha-1)\{a(\alpha+1)+b\}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(f(\alpha),f(\beta))$はx軸上の任意の点をとる.

(iv) $\alpha=\beta$, $\alpha\neq1$, $\beta\neq1$のとき

$\begin{pmatrix} f(\alpha) \\ f(\beta) \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} \alpha^2-1 \\ \alpha^2-1 \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} \alpha-1 \\ \alpha-1 \end{pmatrix}=(\alpha-1)\{a(\alpha+1)+b\}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(f(\alpha),f(\beta))$は$y=x$上の任意の点をとる.

(v) $\alpha=1$, $\beta=1$のとき

$\begin{pmatrix} f(\alpha) \\ f(\beta) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(f(\alpha),f(\beta))$は原点をとる.