

$$(1) (r e^{i\alpha} + i l m \alpha)(r e^{i\beta} + i l m \beta) = r e^{i\alpha} r e^{i\beta} - l m \alpha l m \beta + i(l m \alpha r e^{i\beta} + r e^{i\alpha} l m \beta) = r e^{i(\alpha+\beta)} + i l m (\alpha+\beta)$$

$$\therefore z^n = r e^{i \frac{\pi n}{3}} + i l m \frac{\pi n}{3}$$

よって $m=0, 1, 2, \dots$ とおくと

$$n=6m+1 \text{ のとき } a^n = r e^{i \frac{\pi}{3}} + i l m \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$n=6m+2 \text{ のとき } a^n = r e^{i \frac{2\pi}{3}} + i l m \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$n=6m+3 \text{ のとき } a^n = r e^{i \pi} + i l m \pi = -1$$

$$n=6m+4 \text{ のとき } a^n = r e^{i \frac{4\pi}{3}} + i l m \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$n=6m+5 \text{ のとき } a^n = r e^{i \frac{5\pi}{3}} + i l m \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$n=6m+6 \text{ のとき } a^n = r e^{i 2\pi} + i l m 2\pi = 1$$

よって 6個

$$(2) \frac{(1-a^n)(1-a^{2n})(1-a^{3n})(1-a^{4n})(1-a^{5n})}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)(1-a^4)(1-a^5)} = v \text{ とおす.}$$

$$(i) n=6m+1 \text{ のとき}$$

$$a^n = a$$

$$2n=12m+2 \text{ 対し } a^{2n} = a^2$$

$$3n=18m+3 \text{ 対し } a^{3n} = a^3$$

$$4n=24m+4 \text{ 対し } a^{4n} = a^4$$

$$5n=30m+5 \text{ 対し } a^{5n} = a^5$$

$$\therefore z v = 1$$

$$(ii) n=6m+2 \text{ のとき}$$

$$a^n = a^2$$

$$2n=12m+4 \text{ 対し } a^{2n} = a^4$$

$$3n=18m+6 \text{ 対し } a^{3n} = a^6 = 1$$

$$\therefore z v = 0$$

$$(iii) n=6m+3 \text{ のとき}$$

$$a^n = a^3$$

$$2n=12m+6 \text{ 対し } a^{2n} = a^6 = 1$$

$$\therefore z v = 0$$

$$(iv) n=6m+4 \text{ のとき}$$

$$a^n = a^4$$

$$2n=12m+8 = 6(2m+1)+2 \text{ 対し } a^{2n} = a^2$$

$$3n=18m+12 = 6(3m+1)+6 \text{ 対し } a^{3n} = a^6 = 1$$

$$\therefore z v = 0$$

$$(v) n=6m+5 \text{ のとき}$$

$$a^n = a^5$$

$$2n=12m+10 = 6(2m+1)+4 \text{ 対し } a^{2n} = a^4$$

$$3n=18m+15 = 6(3m+2)+3 \text{ 対し } a^{3n} = a^3$$

$$4n=24m+20 = 6(4m+3)+2 \text{ 対し } a^{4n} = a^2$$

$$5n=30m+25 = 6(5m+4)+1 \text{ 対し } a^{5n} = a$$

$$\therefore z v = 1$$

$$(vi) n=6m+6 \text{ のとき}$$

$$a^n = a^6 = 1$$

$$\therefore z v = 0$$