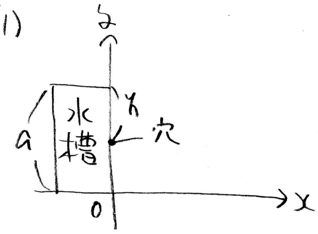
東大理科　1970前期　④

(1)



左図のようにxy座標をとる。

t秒後の噴流のx座標は $x=\sqrt{2gh}\,t$ —①

〃　y座標は $y=a-h+\int_0^t(-gt)\,dt=a-h-g\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^t=-\frac{g}{2}t^2+a-h$ —②

$y=0$ のとき $\frac{g}{2}t^2=a-h$. $t>0$ より $t=\sqrt{\frac{2}{g}(a-h)}$

このとき $x=2\sqrt{h(a-h)}$

よって水槽からの距離が $2\sqrt{h(a-h)}$ cmの点に落ちる。

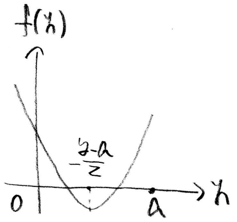
(2) $2\sqrt{h(a-h)}=2\sqrt{-(h^2-ah+\frac{a^2}{4})+\frac{a^2}{4}}=2\sqrt{-(h-\frac{a}{2})^2+\frac{a^2}{4}}$ であるから $h=\frac{a}{2}$ cmにすればよい。

(3) ①②より噴流の軌跡は $y=-\frac{g}{2}\frac{1}{2gh}x^2+a-h$, $y=-\frac{1}{4h}x^2+a-h$

$hy=-\frac{x^2}{4}+ah-h^2$, $h^2+(y-a)h+\frac{x^2}{4}=0$ —①

①をhについての2次方程式とみて、①が $0<h<a$ の範囲に解を持つような (x, y) $(x>0, y>0)$ の集合が噴流の通過する範囲である

$f(h)=h^2+(y-a)h+\frac{x^2}{4}=\left(h+\frac{y-a}{2}\right)^2-\frac{(y-a)^2}{4}+\frac{x^2}{4}$ とする。



①が $0<h<a$ の範囲に解を持つのは以下のときである。

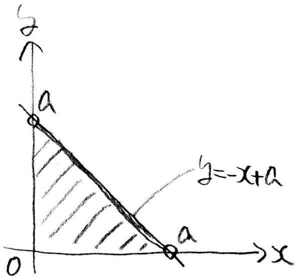
(i) $f(0)f(a)<0$ のとき

$\frac{x^2}{4}\left\{a^2+(y-a)a+\frac{x^2}{4}\right\}<0$, $\frac{x^2}{4}\left(ya+\frac{x^2}{4}\right)<0$

これを満たす (x, y) は $x>0, y>0$ の範囲には存在しない。

(ii) $0<-\frac{y-a}{2}<a$, $-\frac{(y-a)^2}{4}+\frac{x^2}{4}\leqq 0$, $f(0)>0$, $f(a)>0$ のとき

$$\begin{cases} -2a<y-a<0,\ -a<y<a,\ y>0 \text{より } 0<y<a \\ x^2\leqq(y-a)^2,\ |x|\leqq|y-a| \begin{cases} y>a \text{のとき } |y-a|=y-a \text{ より } y\geqq x+a \\ y<a \text{のとき } |y-a|=a-y \text{ より } y\leqq -x+a \end{cases} \\ \frac{x^2}{4}>0 \\ a^2+(y-a)a+\frac{x^2}{4}>0,\ ya+\frac{x^2}{4}>0 \end{cases}$$



よって噴流の通過する範囲は左図の斜線部である。

※境界線上の点含む

ただしx軸上、y軸上の点は含まない。