東大理科　1972前期 ④

$-16+4-20+32=0$

$$\begin{array}{r} 2x^2-3x+16 \\ x+2\,\overline{)\,2x^3+x^2+10x+32} \\ 2x^3+4x^2 \\ \hline -3x^2+10x \\ -3x^2-6x \\ \hline 16x+32 \\ 16x+32 \\ \hline 0 \end{array}$$

$\frac{16}{8}$ 128

$f(x)=\dfrac{x^2(x+8)}{(x^2-1)(x+4)}$ $(x\neq -4, -1, 1)$ とする.

$$f'(x)=\frac{\{2x(x+8)+x^2\}(x^2-1)(x+4)-x^2(x+8)\{2x(x+4)+x^2-1\}}{(x^2-1)^2(x+4)^2}$$

$$\begin{aligned}
分子 &= x(3x+16)(x^3+4x^2-x-4)+x(-x^2-8x)(3x^2+8x-1)\\
&= x(3x^4+12x^3-3x^2-12x+16x^3+64x^2-16x-64-3x^4-8x^3+x^2-24x^3-64x^2+8x)\\
&= x(-4x^3-2x^2-20x-64)=-2x(2x^3+x^2+10x+32)=-2x(x+2)\left\{2\left(x^2-\tfrac{3}{2}x+\tfrac{9}{16}\right)-\tfrac{9}{8}+\tfrac{128}{8}\right\}\\
&= -2x(x+2)\left\{2\left(x-\tfrac{3}{4}\right)^2+\tfrac{119}{8}\right\}
\end{aligned}$$

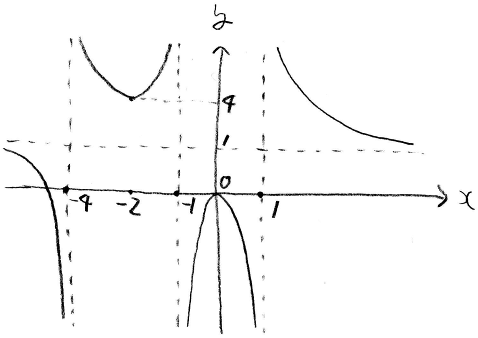
$f'(x)=0$ のとき $x=-2, 0$. $f(x)$ の増減表は下表のようになる

x	$-\infty$	…	-4	…	-2	…	-1	…	0	…	1	…	∞
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	1	↘	$-\infty$ | ∞	↘	4	↗	∞ | $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ | ∞	↘	1

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{8}{x}}{(1-\frac{1}{x^2})(1+\frac{4}{x})}=1$　$\displaystyle\lim_{x\to-4-0}f(x)=\lim_{x\to-4-0}\frac{16\cdot4}{15}\frac{1}{x+4}=-\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-4+0}f(x)=\lim_{x\to-4+0}\frac{16\cdot4}{15}\frac{1}{x+4}=\infty$

$f(-2)=\dfrac{4\cdot6}{3\cdot2}=4$. $\displaystyle\lim_{x\to-1-0}f(x)=\lim_{x\to-1-0}\frac{7}{3}\frac{1}{x^2-1}=\infty$. $\displaystyle\lim_{x\to-1+0}f(x)=\lim_{x\to-1+0}\frac{7}{3}\frac{1}{x^2-1}=-\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1-0}\frac{9}{5}\frac{1}{x^2-1}=-\infty$. $\displaystyle\lim_{x\to1+0}f(x)=\lim_{x\to1+0}\frac{9}{5}\frac{1}{x^2-1}=\infty$. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{8}{x}}{(1-\frac{1}{x^2})(1+\frac{4}{x})}$



$f(x)$ は左図のようになる

よって

$k<0$ のとき 3個

$k=0$ のとき 2個

$0<k<1$ のとき 1個

$k=1$ のとき 0個

$1<k<4$ のとき 1個

$k=4$ のとき 2個

$k>4$ のとき 3個