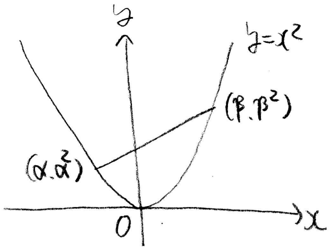
東大理科　1974前期　②



線分の両端の座標を(α, α^2), (β, β^2) $(\alpha<\beta)$とする.

Mの座標は$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$

$(\alpha-\beta)^2+(\alpha^2-\beta^2)^2=l^2$, $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+\alpha^4-2\alpha^2\beta^2+\beta^4=l^2$.

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta+(\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2\beta^2=l^2$ —①

$\frac{\alpha+\beta}{2}=x$, $\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}=y$ とすると.
$$\begin{array}{rl} \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 &= 4x^2 \\ -)\ \alpha^2 \quad\quad +\beta^2 &= 2y \\ \hline 2\alpha\beta \quad\quad &= 4x^2-2y \end{array}$$
$\alpha\beta=2x^2-y$ より.

①より. $4x^2-8x^2+4y+4y^2-4(4x^4-4x^2y+y^2)=l^2$. $-4x^2+4y+\cancel{4y^2}-16x^4+16x^2y-\cancel{4y^2}=l^2$

$(16x^2+4)y=16x^4+4x^2+l^2$. $y=x^2+\frac{l^2}{16x^2+4}$ であるから.

Mは$y=x^2+\frac{l^2}{16x^2+4}$上にある.

$f(x)=x+\frac{l^2}{16x+4}$ $(x\geqq 0)$ とおく.

$f'(x)=1+\frac{-16l^2}{(16x+4)^2}=\frac{(16x+4)^2-16l^2}{(16x+4)^2}$, $f'(x)=0$のとき $(16x+4)^2=16l^2$. $16x+4=4l$. $x=\frac{l-1}{4}$

x	0	$\cdots$	$\frac{l-1}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frac{l^2}{4}$	↘	$\frac{2l-1}{4}$	↗

$f(x)$の増減表は左図のようになる.

よって.求めるMの座標は$\left(\pm\frac{\sqrt{l-1}}{2}, \frac{2l-1}{4}\right)$

$f\left(\frac{l-1}{4}\right)=\frac{l-1}{4}+\frac{l^2}{4l-\cancel{4}+\cancel{4}}$
$=\frac{l}{4}-\frac{1}{4}+\frac{l}{4}=\frac{2l-1}{4}$