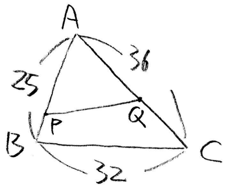
東大理科　1975前期　①

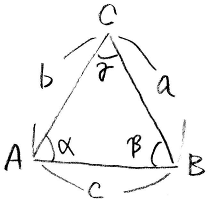


32=a, 36=b, 25=c, ∠BAC=α, ∠CBA=β, ∠ACB=γ とおく.

三角形CABの面積は, $ba\sin\gamma\frac{1}{2}=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$

PがCA上, QがCB上にあり, $\overrightarrow{CP}=k\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CQ}=l\overrightarrow{CB}$ $(0<k<1,\ 0<l<1)$ であるとする

三角形CPQの面積は $kb\,al\sin\gamma\frac{1}{2}=\frac{1}{2}abkl\sin\gamma$



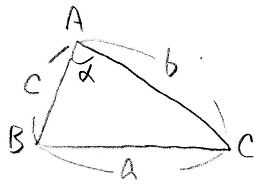
$\frac{1}{2}abkl\sin\gamma=\frac{1}{2}\frac{1}{2}ab\sin\gamma$ であるから $kl=\frac{1}{2}$

$PQ^2=k^2b^2+l^2a^2-2kbla\cos\gamma=k^2b^2+\frac{a^2}{4k^2}-ab\cos\gamma$

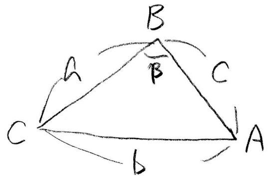
相加平均≧相乗平均より $k^2b^2+\frac{a^2}{4k^2}\geqq 2\sqrt{k^2b^2\frac{a^2}{4k^2}}=ab$,

$k^2b^2+\frac{a^2}{4k^2}=ab$ となるのは $k^2b^2=\frac{a^2}{4k^2}$, $k=\sqrt{\frac{a}{2b}}$, $l=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2b}{a}}=\sqrt{\frac{b}{2a}}$ のときであるから.

PQ^2 は $k=\sqrt{\frac{a}{2b}}$, $l=\sqrt{\frac{b}{2a}}$ のとき最小値 $ab(1-\cos\gamma)$ をとる. ——①



同様に P, Q が AB上, CA上にあるときの PQ^2 の最小値は $bc(1-\cos\alpha)$ ——②



同様に P, Q が BC上, AB上にあるときの PQ^2 の最小値は $ca(1-\cos\beta)$ ——③

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma=(a-b)^2+2ab(1-\cos\gamma)$, $ab(1-\cos\gamma)=\frac{c^2-(a-b)^2}{2}=\frac{625-16}{2}=\frac{609}{2}$

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha=(b-c)^2+2bc(1-\cos\alpha)$, $bc(1-\cos\alpha)=\frac{a^2-(b-c)^2}{2}=\frac{1024-121}{2}=\frac{903}{2}$

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos\beta=(c-a)^2+2ca(1-\cos\beta)$, $ca(1-\cos\beta)=\frac{b^2-(c-a)^2}{2}=\frac{1296-49}{2}=\frac{1247}{2}$

25
25
125
50
625

32
32
64
96
1024

36
36
216
108
1296

であるから ①②③より P, Q は

BCを $1-\sqrt{\frac{b}{2a}}:\sqrt{\frac{b}{2a}}=1-\sqrt{\frac{36}{64}}:\sqrt{\frac{36}{64}}=1-\frac{3}{4}:\frac{3}{4}=1:3$ に分ける点と.

CAを $\sqrt{\frac{a}{2b}}:1-\sqrt{\frac{a}{2b}}=\sqrt{\frac{16}{36}}:1-\sqrt{\frac{16}{36}}=\frac{2}{3}:1-\frac{2}{3}=2:1$ に分ける点

にある.