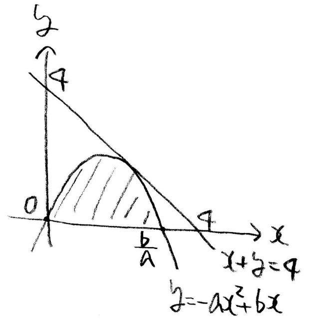
東大理科　1975前期　③



直線と放物線が接するとき

xについての2次方程式 $-x+4=-ax^2+bx$, $ax^2+(-b-1)x+4=0$ —① が重解を持つから

$(b+1)^2-16a=0$, $a=\frac{(b+1)^2}{16}$

このとき①は $\frac{(b+1)^2}{16}x^2-(b+1)x+4=0$. $\left(\frac{b+1}{4}x-2\right)^2=0$, $x=\frac{8}{b+1}$ となるから

$0<\frac{8}{b+1}<4$, $b>1$ でなければならない.

求める面積は上図の斜線部であり、この値は

$$\int_0^{\frac{b}{a}}(-ax^2+bx)\,dx=\left[-a\frac{x^3}{3}+b\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{b}{a}}=-\frac{a}{3}\frac{b^3}{a^3}+\frac{b}{2}\frac{b^2}{a^2}=-\frac{b^3}{3a^2}+\frac{b^3}{2a^2}=\frac{b^3}{6a^2}=\frac{256b^3}{6(b+1)^4}=\frac{128b^3}{3(b+1)^4}$$

$f(b)=\frac{b^3}{(b+1)^4}$ $(b>1)$ とする.

$$f'(b)=\frac{3b^2(b+1)^4-b^3 4(b+1)^3}{(b+1)^8}=\frac{b^2(b+1)^3}{(b+1)^8}(3b+3-4b)=\frac{b^2(b+1)^3}{(b+1)^8}(3-b)$$ $f'(b)=0$ のとき $b=3$

b	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(b)$	$+$	0	$-$
$f(b)$	$\nearrow$	$\frac{27}{256}$	$\searrow$

$f(b)$の増減表は左表のようになる.

よって求める面積は $b=3$, $a=1$ のとき 最大値 $\frac{128}{3}\frac{27}{256}=\frac{9}{2}$ をとる.