東大理科　1978前期　④

$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 5\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $A^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 5\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 5\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{9} & (\frac{1}{3}+3)5\\ 0 & 9\end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix}\frac{1}{9} & (\frac{1}{3}+3)5\\ 0 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 5\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{27} & (\frac{1}{9}+1+9)5\\ 0 & 27\end{pmatrix}$

$A^4=\begin{pmatrix}\frac{1}{27} & (\frac{1}{9}+1+9)5\\ 0 & 27\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 5\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{81} & (\frac{1}{27}+\frac{1}{3}+3+27)5\\ 0 & 81\end{pmatrix}$

初項 $\frac{3}{3^n}$. 公比 3^2, 項数nの等比数列の和は $\dfrac{\frac{3}{3^n}(3^{2n}-1)}{3^2-1}=\frac{3}{8}(3^n-\frac{1}{3^n})$

$A^1=\begin{pmatrix}\frac{1}{3^1} & (3^1-\frac{1}{3^1})\frac{15}{8}\\ 0 & 3^1\end{pmatrix}$ —①

kを任意の自然数として. $A^k=\begin{pmatrix}\frac{1}{3^k} & (3^k-\frac{1}{3^k})\frac{15}{8}\\ 0 & 3^k\end{pmatrix}$ と仮定すると

$A^{k+1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3^k} & (3^k-\frac{1}{3^k})\frac{15}{8}\\ 0 & 3^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 5\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3^{k+1}} & (\frac{1}{3^k}\frac{8}{3}+3^{k+1}-\frac{3}{3^k})\frac{15}{8}\\ 0 & 3^{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3^{k+1}} & (3^{k+1}-\frac{1}{3^{k+1}})\frac{15}{8}\\ 0 & 3^{k+1}\end{pmatrix}$ —②

①②より数学的帰納法により. $A^n=\begin{pmatrix}\frac{1}{3^n} & (3^n-\frac{1}{3^n})\frac{15}{8}\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3^n} & (3^n-\frac{1}{3^n})\frac{15}{8}\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{15}{8}b\cdot 3^n+(a-\frac{15}{8}b)\frac{1}{3^n}\\ b\cdot 3^n\end{pmatrix}$

$15\times 15=75+150=225$

$a_n^2+b_n^2=\frac{225}{64}b^2(3^n)^2+\frac{15}{4}b(a-\frac{15}{8}b)+(a-\frac{15}{8}b)^2\frac{1}{(3^n)^2}+b^2(3^n)^2=\frac{289}{64}b^2(3^n)^2+\frac{15}{4}b(a-\frac{15}{8}b)+(a-\frac{15}{8}b)^2\frac{1}{(3^n)^2}$

$17\times 17=119+170=289$

$u=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{15}{8}b+(a-\frac{15}{8}b)\frac{1}{(3^n)^2}}{\sqrt{\frac{289}{64}b^2+\frac{15}{4}b(a-\frac{15}{8}b)\frac{1}{(3^n)^2}+(a-\frac{15}{8}b)^2\frac{1}{(3^n)^4}}}=\frac{15}{17}\frac{b}{\sqrt{b^2}}$. $b>0$のとき. $u=\frac{15}{17}$. $b<0$のとき. $u=-\frac{15}{17}$

$v=\lim_{n\to\infty}\dfrac{b}{\sqrt{\frac{289}{64}b^2+\frac{15}{4}b(a-\frac{15}{8}b)\frac{1}{(3^n)^2}+(a-\frac{15}{8}b)^2\frac{1}{(3^n)^4}}}=\frac{8}{17}\frac{b}{\sqrt{b^2}}$. $b>0$のとき $v=\frac{8}{17}$. $b<0$のとき $v=-\frac{8}{17}$

$b=0$のとき　$a_n=a\frac{1}{3^n}$. $b_n=0$. $a_n^2+b_n^2=a^2\frac{1}{(3^n)^2}$

$u=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\sqrt{a^2}}$　$a>0$のとき $u=1$. $a<0$のとき $u=-1$.　$v=0$