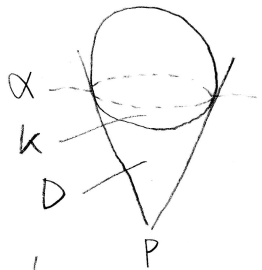
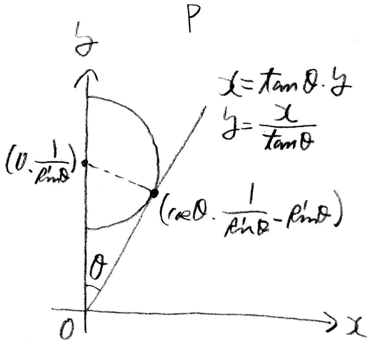
東大理科　1979前期　②





xy座標で考える。

円錐は $y=\frac{x}{\tan\theta}$ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$ の $y\geqq 0$ の部分を y軸のまわりに回転させたものである、とする。

$x^2+(y-t)^2=1$ と $y=\frac{x}{\tan\theta}$ が接するとき

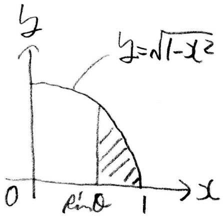
$x^2+(\frac{x}{\tan\theta}-t)^2=1$, $(1+\frac{1}{\tan^2\theta})x^2-\frac{2t}{\tan\theta}x+t^2-1=0$ —① が重解を持つから

$\frac{t^2}{\tan^2\theta}-(1+\frac{1}{\tan^2\theta})(t^2-1)=0$, $\cancel{\frac{t^2}{\tan^2\theta}}-t^2+1-\cancel{\frac{t^2}{\tan^2\theta}}+\frac{1}{\tan^2\theta}=0$

$t^2=\frac{\tan^2\theta+1}{\tan^2\theta}=\frac{\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}=\frac{1}{\sin^2\theta}$, $t>0$ より $t=\frac{1}{\sin\theta}$

このとき、①より $\frac{x^2}{\sin^2\theta}-\frac{\frac{2}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}x+\frac{1-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}=0$. $x^2-2\cos\theta\cdot x+\cos^2\theta=0$, $(x-\cos\theta)^2=0$. $x=\cos\theta$

$y=\frac{\cos\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta$ であるから、接点の座標は $(\cos\theta, \frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta)$



Kの体積は、左図の斜線部をx軸のまわりに回転させたものの体積に等しいから

$\pi\int_{\sin\theta}^{1}(1-x^2)dx=\pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{\sin\theta}^{1}=\pi(\frac{2}{3}-\sin\theta+\frac{\sin^3\theta}{3})$ —②

KとDの体積の和は $\frac{1}{3}\pi\cos^2\theta(\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta)=\pi(\frac{1}{3}-\frac{\sin^2\theta}{3})(\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta)=\pi(\frac{1}{3\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{3}-\frac{\sin\theta}{3}+\frac{\sin^3\theta}{3})$

Dの体積は $\pi(\frac{1}{3\sin\theta}-\frac{2\sin\theta}{3}-\frac{2}{3}+\sin\theta)=\pi(\frac{1}{3\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{3}-\frac{2}{3})$

Dの体積が球の体積の半分に等しいから $\frac{2}{\cancel{3}}\cancel{\pi}=\cancel{\pi}(\frac{1}{\cancel{3}\sin\theta}+\frac{\sin\theta}{\cancel{3}}-\frac{2}{\cancel{3}})$, $2\sin\theta=1+\sin^2\theta-2\sin\theta$

$\sin^2\theta-4\sin\theta+1=0$. $\sin\theta=2\pm\sqrt{4-1}=2\pm\sqrt{3}$, $0<\sin\theta<1$ より $\sin\theta=2-\sqrt{3}$

②より、Kの体積は

$\sin^3\theta=8-12\sqrt{3}+18-3\sqrt{3}=26-15\sqrt{3}$ より、$(\frac{2}{3}-2+\sqrt{3}+\frac{26}{3}-5\sqrt{3})\pi=(\frac{22}{3}-4\sqrt{3})\pi$