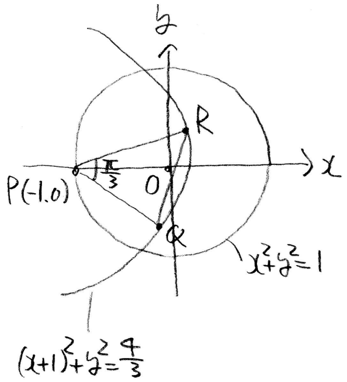
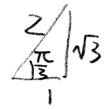
東大理科　1979前期　④



xy平面で考える。

O, Pの座標を 原点, $(-1, 0)$ とする。



Qは $(x+1)^2+y^2=\frac{4}{3}$ 上にあるとして $\left(-1+\frac{2}{\sqrt3}\cos\theta,\ \frac{2}{\sqrt3}\sin\theta\right)$ とおく

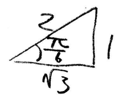
RはQをPを中心に $\frac{\pi}{3}$ 回転させたものであるから

$$\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt3}\cos\theta\\ \frac{2}{\sqrt3}\sin\theta\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac12 & -\frac{\sqrt3}{2}\\ \frac{\sqrt3}{2} & \frac12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt3}\cos\theta\\ \frac{2}{\sqrt3}\sin\theta\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt3}\cos\theta-\sin\theta-1\\ \cos\theta+\frac{1}{\sqrt3}\sin\theta\end{pmatrix}$$ とおける

$OQ^2+OR^2=f(\theta)$ とおくと

$$f(\theta)=1-\frac{4}{\sqrt3}\cos\theta+\frac{4}{3}\cos^2\theta+\frac{4}{3}\sin^2\theta+\frac{1}{3}\cos^2\theta+\sin^2\theta+1\cancel{-\frac{2}{\sqrt3}\cos\theta\sin\theta}+2\sin\theta-\frac{2}{\sqrt3}\cos\theta+\cos^2\theta\cancel{+\frac{2}{\sqrt3}\cos\theta\sin\theta}+\frac{1}{3}\sin^2\theta$$

$$=2-\frac{6}{\sqrt3}\cos\theta+\frac{4}{3}+\frac{1}{3}+1+2\sin\theta=\frac{14}{3}-2\sqrt3\cos\theta+2\sin\theta$$



$f'(\theta)=2\sqrt3\sin\theta+2\cos\theta$. $f'(\theta)=0$ のとき $\sqrt3\sin\theta=-\cos\theta$. $\tan\theta=-\frac{1}{\sqrt3}$. $\theta=-\frac{\pi}{6}$.

$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{14}{3}-\cancel{2}\sqrt3\frac{\sqrt3}{\cancel{2}}-\cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}}=\frac{2}{3}$

$x^2+y^2=1$ と $(x+1)^2+y^2=\frac{4}{3}$ の交点は $\cancel{x^2}+2x+1-\cancel{x^2}+1=\frac{4}{3}$. $2x=-\frac{2}{3}$. $x=-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{9}+y^2=1$. $y^2=\frac{8}{9}$. $y=\pm\frac{2\sqrt2}{3}$ より $\left(-\frac{1}{3}, \pm\frac{2\sqrt2}{3}\right)$

θの最小値は Qが $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt2}{3}\right)$ にあるときであり、このとき $\sin\theta=\dfrac{-\frac{2\sqrt2}{3}}{\frac{2}{\sqrt3}}=-\frac{\cancel{2}\sqrt2\sqrt3}{3\cancel{2}}=-\frac{\sqrt6}{3}$.

$\frac{2}{3}+\cos^2\theta=1$. $\cos^2\theta=\frac{1}{3}$. $\cos\theta>0$ より $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt3}$. $f(\theta)=\frac{14}{3}-2\cancel{\sqrt3}\frac{1}{\cancel{\sqrt3}}-2\frac{\sqrt6}{3}=\frac{8}{3}-\frac{2\sqrt6}{3}$

θの最大値は Rが $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt2}{3}\right)$ にあるときであり このとき対称性より $f(\theta)=\frac{8}{3}-\frac{2\sqrt6}{3}$

θ	最小値	…	$-\frac{\pi}{6}$	…	最大値
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$	$\frac{8}{3}-\frac{2\sqrt6}{3}$	↘	$\frac{2}{3}$	↗	$\frac{8}{3}-\frac{2\sqrt6}{3}$

f(θ)の増減表は左表のようになる。

f(θ)の最大値は $\frac{8}{3}-\frac{2\sqrt6}{3}$, 最小値は $\frac{2}{3}$