東大理科　1979前期　⑤

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおく.

$f(x)$ は O を通るから $d=0$.

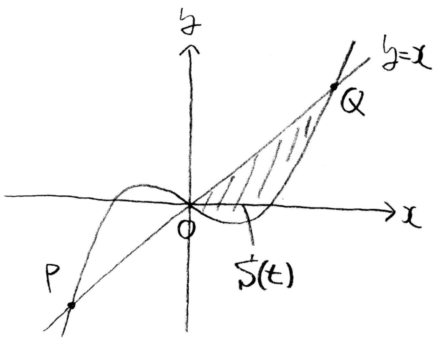
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$. $f'(0)=0$ より $c=0$

$f''(x)=6ax+2b$. $f''(0)=2$ より. $2b=2$. $b=1$

$f(x)=ax^3+x^2$ とおく.

$f(x)$ は P を通るから $-t^3a+t^2=-t$. $a=\dfrac{t+1}{t^2}$

$f(x)=\dfrac{t+1}{t^2}x^3+x^2$ とおく



$\dfrac{t+1}{t^2}x^3+x^2=x$. $\{(t+1)x^2+t^2x-t^2\}x=0$

$$\begin{array}{r|l} & (t+1)x-t \\ \hline x+t & (t+1)x^2+t^2x-t^2 \\ & (t+1)x^2+(t^2+t)x \\ \hline & -tx-t^2 \\ & -tx-t^2 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$(x+t)\{(t+1)x-t\}x=0$ より

Q の x 座標は $\dfrac{t}{t+1}$

$$S(t)=\int_0^{\frac{t}{t+1}}\left(-\frac{t+1}{t^2}x^3-x^2+x\right)dx=\left[-\frac{t+1}{t^2}\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{t}{t+1}}$$

$$=-\frac{t+1}{4t^2}\frac{t^4}{(t+1)^4}-\frac{t^3}{3(t+1)^3}+\frac{t^2}{2(t+1)^2}=-\frac{t^2}{4(t+1)^3}-\frac{t^3}{3(t+1)^3}+\frac{t^2}{2(t+1)^2}$$

$$=-\frac{1}{4(t+1)(1+\frac{1}{t})^2}-\frac{1}{3(1+\frac{1}{t})^3}+\frac{1}{2(1+\frac{1}{t})^2}$$

$$\lim_{t\to\infty}S(t)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$