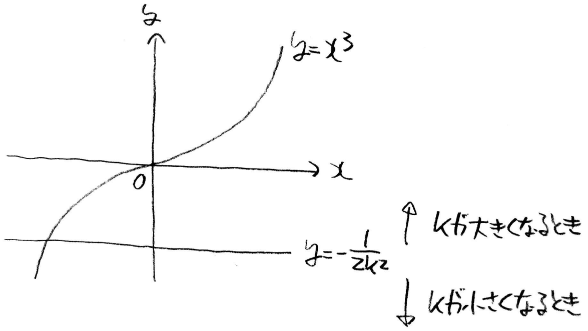
東大理科　1980前期　④

原点とPとの間のキョリの2乗は $\sin^2 t+2\sin t\cos t+\cos^2 t+k^2\sin^4 t\cos^4 t = k^2\sin^4 t\cos^4 t+2\sin t\cos t+1$

$\sin t\cos t=\frac{1}{2}\sin 2t$ より $-\frac{1}{2}\leqq \sin t\cos t\leqq\frac{1}{2}$

$f(s)=k^2s^4+2s+1$ $\left(-\frac{1}{2}\leqq s\leqq\frac{1}{2}\right)$ の最大値,最小値を求めればよい.

$f'(s)=4k^2s^3+2$. $f'(s)=0$ のとき $s^3=-\frac{1}{2k^2}$. $s=-\frac{1}{\sqrt[3]{2k^2}}$



$\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{2k^2}$ のとき $-\frac{1}{8}=-\frac{1}{2k^2}$. $k^2=4$

$k>0$ より $k=2$

(i) $0<k\leqq 2$ のとき

s	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$f'(s)$		$+$	
$f(s)$	$\frac{1}{16}k^2$	$\nearrow$	$\frac{1}{16}k^2+2$

$f(s)$の増減表は左表のようになる

最大値は $\frac{1}{16}k^2+2$, 最小値は $\frac{1}{16}k^2$

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}k^2-1+1=\frac{1}{16}k^2$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}k^2+1+1=\frac{1}{16}k^2+2$

(ii) $k>2$ のとき

s	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt[3]{2k^2}}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$f'(s)$		$-$	0	$+$	
$f(s)$	$\frac{1}{16}k^2$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{2k^2}}+1$	$\nearrow$	$\frac{1}{16}k^2+2$

$f(s)$の増減表は左表のようになる.

最大値は $\frac{1}{16}k^2+2$, 最小値は $-\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{2k^2}}+1$

$f\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2k^2}}\right)=k^2\frac{1}{2k^2\sqrt[3]{2k^2}}-\frac{2}{\sqrt[3]{2k^2}}+1=-\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{2k^2}}+1$