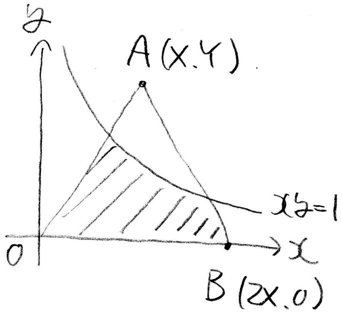
東大理科　1980前期　⑥



A, Bの座標を (X, Y) $(2X, 0)$ $(X>0, Y>0)$ とする.

OAの方程式は $y=\frac{Y}{X}x$.

$x\frac{Y}{X}x=1$, $x=\sqrt{\frac{X}{Y}}$, $y=\sqrt{\frac{Y}{X}}$ より. これと $xy=1$ の交点は $\left(\sqrt{\frac{X}{Y}}, \sqrt{\frac{Y}{X}}\right)$

OAと $xy=1$ が交点を持つとき $\sqrt{\frac{X}{Y}} \leqq X$.

これが成り立つとき $\frac{X}{Y} \leqq X^2$　$XY \geqq 1$ —①

ABの方程式は $y=-\frac{Y}{X}(x-2X)$, $-x\frac{Y}{X}(x-2X)=1$, $\frac{Y}{X}x^2-2Yx+1=0$. $x^2-2Xx+\frac{X}{Y}=0$. $x=X\pm\sqrt{X^2-\frac{X}{Y}}$

$x \geqq X$ より $x=X+\sqrt{X^2-\frac{X}{Y}}$, $y=\frac{1}{X+\sqrt{X^2-\frac{X}{Y}}}$ より. これと $xy=1$ の交点は $\left(X+\sqrt{X^2-\frac{X}{Y}}, \frac{1}{X+\sqrt{X^2-\frac{X}{Y}}}\right)$

ABと $xy=1$ が交点を持つとき $X^2-\frac{X}{Y} \geqq 0$ —② かつ $X+\sqrt{X^2-\frac{X}{Y}} \leqq 2X$ —③

②が成り立つとき $X^2 \geqq \frac{X}{Y}$　$XY \geqq 1$ —②'. ③が成り立つとき $X^2-\frac{X}{Y} \leqq X^2$　$\frac{X}{Y} \geqq 0$. $XY \geqq 0$ —③'

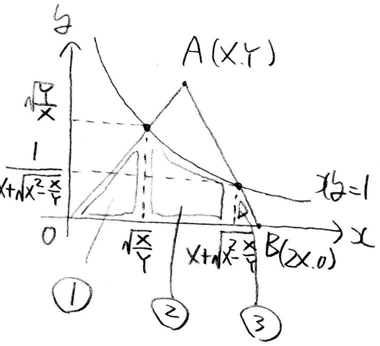
②③より. ABと $xy=1$ が交点を持つとき $XY \geqq 1$ —④

求める面積を S' とする.

(i) $XY<1$ のとき

OA, ABと $xy=1$ は交点を持たないから. $S'=S$

(ii) $XY \geqq 1$ のとき



左図の

①の面積は $\sqrt{\frac{X}{Y}}\sqrt{\frac{Y}{X}}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

②の面積は $\int_{\sqrt{\frac{X}{Y}}}^{X+\sqrt{X^2-\frac{X}{Y}}}\frac{dx}{x}=\left[\log x\right]_{\sqrt{\frac{X}{Y}}}^{X+\sqrt{X^2-\frac{X}{Y}}}=\log\left(X+\sqrt{X^2-\frac{X}{Y}}\right)-\log\sqrt{\frac{X}{Y}}$

$=\log\frac{X+\sqrt{X^2-\frac{X}{Y}}}{\sqrt{\frac{X}{Y}}}=\log\left(\sqrt{XY}+\sqrt{XY-1}\right)$

③の面積は $\left(2X-X-\sqrt{X^2-\frac{X}{Y}}\right)\frac{1}{X+\sqrt{X^2-\frac{X}{Y}}}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\frac{\left(X-\sqrt{X^2-\frac{X}{Y}}\right)^2}{\left(X+\sqrt{X^2-\frac{X}{Y}}\right)\left(X-\sqrt{X^2-\frac{X}{Y}}\right)}$

$=\frac{1}{2}\frac{X^2-2X\sqrt{X^2-\frac{X}{Y}}+X^2-\frac{X}{Y}}{\cancel{X^2}-\cancel{X^2}+\frac{X}{Y}}=\frac{1}{2}\left(2XY-2\sqrt{X^2Y^2-XY}-1\right)=XY-\sqrt{X^2Y^2-XY}-\frac{1}{2}$

よって $S'=\log\left(\sqrt{XY}+\sqrt{XY-1}\right)+XY-\sqrt{X^2Y^2-XY}$

$S=\cancel{2}XY\frac{1}{\cancel{2}}=XY$ であるから $S'=\log\left(\sqrt{S}-\sqrt{S-1}\right)+S-\sqrt{S^2-S}$