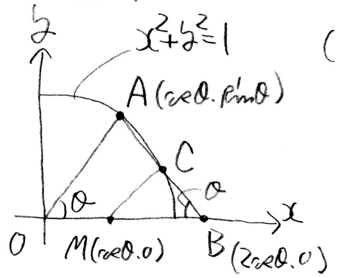
東大理科　1982前期 (3)



(1) $\triangle OAB$ は $OA=AB=1$ の2等辺3角形である。

Aの座標を $(\cos\theta, \sin\theta)$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とするとBの座標は $(2\cos\theta, 0)$

直線ABの方程式は $y=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(x-2\cos\theta)$

Cの座標は $x^2+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}(x^2-4\cos\theta x+4\cos^2\theta)=1$, $\frac{1}{\cos^2\theta}x^2-\frac{4\sin^2\theta}{\cos\theta}x+4\sin^2\theta-1=0$.

$x^2-4(1-\cos^2\theta)\cos\theta x+(3-4\cos^2\theta)\cos^2\theta=0$. $x^2+(4\cos^3\theta-4\cos\theta)x-4\cos^4\theta+3\cos^2\theta=0$

$(x-\cos\theta)(x+4\cos^3\theta-3\cos\theta)=0$　$x\neq\cos\theta$ より $x=-4\cos^3\theta+3\cos\theta$

$y=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(-4\cos^3\theta+\cos\theta)=4\sin\theta(1-\sin^2\theta)-\sin\theta=-4\sin^3\theta+3\sin\theta$ より

$(-4\cos^3\theta+3\cos\theta, -4\sin^3\theta+3\sin\theta)$

$$
\begin{array}{r}
x+4\theta^3-3\theta \\
x-\theta \,\big)\, x^2+(4\theta^3-4\theta)x-4\theta^4+3\theta^2 \\
x^2 \qquad\quad -\theta x \qquad\qquad\quad \\
\hline
(4\theta^3-3\theta)x-4\theta^4+3\theta^2 \\
(4\theta^3-3\theta)x-4\theta^4+3\theta^2 \\
\hline
0
\end{array}
$$

$-4\cos^3\theta+3\cos\theta>\cos\theta$ —① かつ $-4\sin^3\theta+3\sin\theta>0$ —② であればよい。

①のとき $4\cos^3\theta<2\cos\theta$, $\cos\theta<\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$ —①'

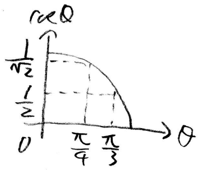
②のとき $4\sin^3\theta<3\sin\theta$, $\sin\theta<\frac{\sqrt{3}}{2}$　$0<\theta<\frac{\pi}{3}$ —②'

①'②'より $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{3}$

(2) BCの長さの2乗は $(-4\cos^3\theta+\cos\theta)^2+(-4\sin^3\theta+3\sin\theta)^2=16\cos^6\theta-8\cos^4\theta+\cos^2\theta+(1-\cos^2\theta)\{-4(1-\cos^2\theta)+3\}^2$

$=16\cos^6\theta-8\cos^4\theta+\cos^2\theta+(1-\cos^2\theta)(4\cos^2\theta-1)^2=16\cos^6\theta-8\cos^4\theta+\cos^2\theta+(1-\cos^2\theta)(16\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1)$

$=\cancel{16\cos^6\theta}-\cancel{8\cos^4\theta}+\cancel{\cos^2\theta}+16\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1-\cancel{16\cos^6\theta}+\cancel{8\cos^4\theta}-\cancel{\cos^2\theta}=16\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1=(4\cos^2\theta-1)^2$



$4\cos^2\theta-1>4\cdot\frac{1}{4}-1>0$ であるから、BCの長さは $4\cos^2\theta-1$.

(3) Mの座標は $(\cos\theta, 0)$　$\angle CBM=\theta$

CMの長さを l とすると、余弦定理より $l^2=16\cos^4\theta-8\cos^2\theta+1+\cos^2\theta-2(4\cos^2\theta-1)\cos\theta\cdot\cos\theta$

$=16\cos^4\theta-7\cos^2\theta+1-8\cos^4\theta+2\cos^2\theta=8\cos^4\theta-5\cos^2\theta+1=8\left(\cos^4\theta-\frac{5}{8}\cos^2\theta+\frac{25}{256}\right)-\frac{25}{32}+1$

$=8\left(\cos^2\theta-\frac{5}{16}\right)^2+\frac{7}{32}$

$\frac{1}{4}<\cos^2\theta<\frac{1}{2}$ であるから、l は $\cos^2\theta=\frac{5}{16}$ のとき最小値 $\frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{14}}{8}$,

$\cos^2\theta=\frac{1}{2}$ のとき最大値 $\sqrt{8\left(\frac{3}{16}\right)^2+\frac{7}{32}}=\sqrt{\frac{9+7}{32}}=\frac{4}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ をとる。

よって、$\frac{\sqrt{14}}{8}<l<\frac{\sqrt{2}}{2}$