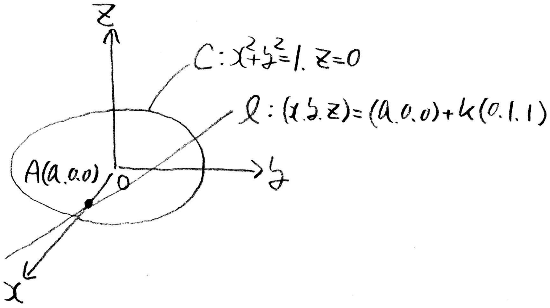
東大理科　1983前期　③



Oを原点とする xyz 座標で考える。
Cの方程式を $x^2+y^2=1,\ z=0$.
Aの座標を $(a,0,0)$
lの方程式を $(x,y,z)=(a,0,0)+k(0,1,1)$ とする。

C上の点 $(\cos\theta,\sin\theta,0)$ と l 上の点 (a,k,k) の距離の2乗を L とすると

$$L=(a-\cos\theta)^2+(k-\sin\theta)^2+k^2=a^2-2a\cos\theta+\cos^2\theta+k^2-2k\sin\theta+\sin^2\theta+k^2$$

$$=2k^2-2k\sin\theta+a^2-2a\cos\theta+1=2\left(k^2-k\sin\theta+\frac{\sin^2\theta}{4}\right)-\frac{1}{2}(1-\cos^2\theta)+a^2-2a\cos\theta+1$$

$$=2\left(k-\frac{\sin\theta}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cos^2\theta-2a\cos\theta+a^2+\frac{1}{2}=2\left(k-\frac{\sin\theta}{2}\right)^2+\frac{1}{2}(\cos^2\theta-4a\cos\theta+4a^2)-2a^2+a^2+\frac{1}{2}$$

$$=2\left(k-\frac{\sin\theta}{2}\right)^2+\frac{1}{2}(\cos\theta-2a)^2-a^2+\frac{1}{2}$$

(i) $0\leqq a\leqq\frac{1}{2}$ のとき、$\cos\theta=2a$、このときのθをθ_0として $k=\frac{\sin\theta_0}{2}$ のとき、Lは最小値 $-a^2+\frac{1}{2}$ をとる。

(ii) $a>\frac{1}{2}$ のとき $\cos\theta=1,\ \theta=0,\ k=0$ のとき Lは最小値 $\frac{1}{2}(1-2a)^2-a^2+\frac{1}{2}$

$$=\frac{1}{2}(4a^2-4a+1)-a^2+\frac{1}{2}$$

$$=a^2-2a+1=(a-1)^2 \text{ をとる。}$$

よって最短キョリは、$0\leqq a\leqq\frac{1}{2}$ のとき $\sqrt{-a^2+\frac{1}{2}}$ 、$a>\frac{1}{2}$ のとき $|a-1|$