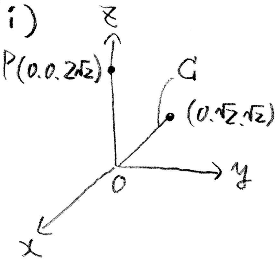
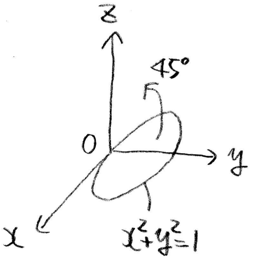
東大理科 1984前期 ①

i)




Cは $(\cos\theta,\ 1+\sin\theta,\ 0)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ を

平面 $x=\cos\theta$ 上で、x軸を中心に45°回転させたものであるから

$$\begin{pmatrix}\cos45^\circ & -\sin45^\circ\\ \sin45^\circ & \cos45^\circ\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+\sin\theta\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+\sin\theta\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1+\sin\theta}{\sqrt2}\\ \frac{1+\sin\theta}{\sqrt2}\end{pmatrix}$$ より

C上の点は $\left(\cos\theta,\ \frac{1+\sin\theta}{\sqrt2},\ \frac{1+\sin\theta}{\sqrt2}\right)$ と書ける

Pと $\left(\cos\theta,\ \frac{1+\sin\theta}{\sqrt2},\ \frac{1+\sin\theta}{\sqrt2}\right)$ を通る直線は、$(0,0,2\sqrt2)+k\left(\cos\theta,\ \frac{1+\sin\theta}{\sqrt2},\ \frac{1+\sin\theta}{\sqrt2}-2\sqrt2\right)$ と書け、

これと、xy平面の交点は、$2\sqrt2+k\left(\frac{1+\sin\theta}{\sqrt2}-2\sqrt2\right)=0$ のとき、$4+k(1+\sin\theta-4)=0$、$k(3-\sin\theta)=4$、$k=\frac{4}{3-\sin\theta}$ より、

$$(0,0,2\sqrt2)+\frac{4}{3-\sin\theta}\left(\cos\theta,\ \frac{1+\sin\theta}{\sqrt2},\ \frac{1+\sin\theta}{\sqrt2}-2\sqrt2\right)=\left(\frac{4\cos\theta}{3-\sin\theta},\ \frac{2\sqrt2(1+\sin\theta)}{3-\sin\theta},\ 0\right)$$

$$x=\frac{4\cos\theta}{3-\sin\theta},\quad y=\frac{2\sqrt2(1+\sin\theta)}{3-\sin\theta}$$

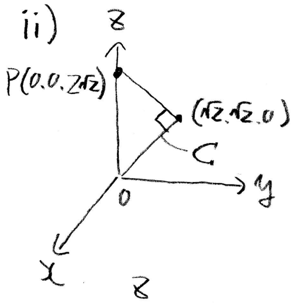
$3y-y\sin\theta=2\sqrt2+2\sqrt2\sin\theta$、$(y+2\sqrt2)\sin\theta=3y-2\sqrt2$、$\sin\theta=\frac{3y-2\sqrt2}{y+2\sqrt2}$

$$3-\sin\theta=\frac{\cancel{3y}+6\sqrt2-\cancel{3y}+2\sqrt2}{y+2\sqrt2}=\frac{8\sqrt2}{y+2\sqrt2}$$

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=\frac{y^2+4\sqrt2y+\cancel{8}-9y^2+12\sqrt2y-\cancel{8}}{(y+2\sqrt2)^2}=\frac{-8y^2+16\sqrt2y}{(y+2\sqrt2)^2}$$

$(3-\sin\theta)^2x^2=16\cos^2\theta$、$\frac{128}{\cancel{(y+2\sqrt2)^2}}x^2=16\frac{-8y^2+16\sqrt2y}{\cancel{(y+2\sqrt2)^2}}$、$x^2=-y^2+2\sqrt2y$、$x^2+y^2-2\sqrt2y+2=2$、$x^2+(y-\sqrt2)^2=2$

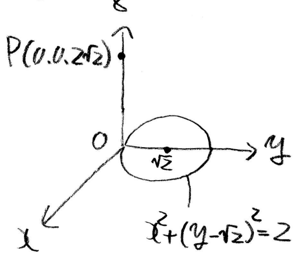
ii)




Cを底面、Pを頂点とする円錐の

底面積はπ、高さは2であるから、

体積は $\pi\cdot2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\pi$ —①




Sを底面、Pを頂点とする円錐の

底面積はπ·2、高さは $2\sqrt2$ であるから

体積は $2\pi\cdot2\sqrt2\cdot\frac{1}{3}=\frac{4\sqrt2}{3}\pi$ —②

①②より、求める体積は $\frac{2}{3}(2\sqrt2-1)\pi$