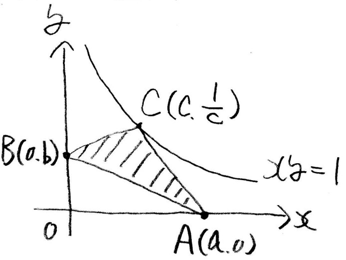
東大理科　1986前期　①



$\overrightarrow{CA}=\left(a-c,\ -\frac{1}{c}\right)$, $\overrightarrow{CB}=\left(-c,\ b-\frac{1}{c}\right)$

三角形ABCの面積をSとすると、$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{CA}|^2|\overrightarrow{CB}|^2-(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB})^2}$

$$4S^2=\left\{(a-c)^2+\frac{1}{c^2}\right\}\left\{c^2+\left(b-\frac{1}{c}\right)^2\right\}-\left\{-(a-c)c-\frac{1}{c}\left(b-\frac{1}{c}\right)\right\}^2$$

$$=\cancel{(a-c)^2c^2}+(a-c)^2\left(b-\frac{1}{c}\right)^2+1+\cancel{\frac{1}{c^2}\left(b-\frac{1}{c}\right)^2}-\cancel{(a-c)^2c^2}-2(a-c)\left(b-\frac{1}{c}\right)-\cancel{\frac{1}{c^2}\left(b-\frac{1}{c}\right)^2}$$

$$=\left\{(a-c)\left(b-\frac{1}{c}\right)-1\right\}^2 \quad \text{—①}$$

$y=\frac{1}{x}$ のCにおける接線の方程式は、$y-\frac{1}{c}=-\frac{1}{c^2}(x-c)$ —②

$-\frac{1}{c}=-\frac{1}{c^2}x+\frac{1}{c}$, $\frac{1}{c^2}x=\frac{2}{c}$, $x=2c$ より、②とx軸の交点のx座標は$2c$

よって、$0\leqq a\leqq 2c$, $-c\leqq a-c\leqq c$ —③

$y-\frac{1}{c}=\frac{1}{c}$, $y=\frac{2}{c}$ より、②とy軸の交点のy座標は$\frac{2}{c}$

よって　$0\leqq b\leqq \frac{2}{c}$, $-\frac{1}{c}\leqq b-\frac{1}{c}\leqq \frac{1}{c}$ —④

③④より、①は　$a-c=-c$, $b-\frac{1}{c}=\frac{1}{c}$ のとき、または $a-c=c$, $b-\frac{1}{c}=-\frac{1}{c}$ のとき最大値4をとる。
このとき $S=1$

よって、Sは、$A(0,0)$ $B\left(0,\frac{2}{c}\right)$ または $A(2c,0)$, $B(0,0)$ のとき最大値1をとる。