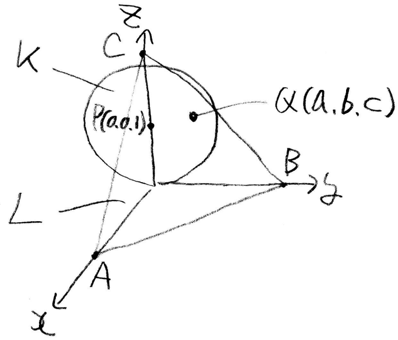
東大理科　1987前期　③



Lの法線ベクトルは $(a,b,c-1)$

Lの方程式は $a(x-a)+b(y-b)+(c-1)(z-c)=0$.

$a^2+b^2+(c-1)^2=1$, $a^2+b^2+c^2=2c$.

$ax-a^2-b^2-c^2+c=0$. $ax-c=0$. $x=\frac{c}{a}$ より Aの座標は $\left(\frac{c}{a},0,0\right)$

$-a^2+by-b^2-c^2+c=0$. $by-c=0$. $y=\frac{c}{b}$ より Bの座標は $\left(0,\frac{c}{b},0\right)$

$-a^2-b^2+(c-1)z-c^2+c=0$. $(c-1)z-c=0$. $z=\frac{c}{c-1}$ より Cの座標は $\left(0,0,\frac{c}{c-1}\right)$

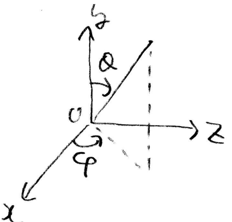
$\overrightarrow{CA}=\left(\frac{c}{a},0,-\frac{c}{c-1}\right)$　$\overrightarrow{CB}=\left(0,\frac{c}{b},-\frac{c}{c-1}\right)$

三角形ABCの面積をSとおくと、$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{CA}|^2|\overrightarrow{CB}|^2-(\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB})^2}$

$$4S^2=\left\{\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{(c-1)^2}\right\}\left\{\frac{c^2}{b^2}+\frac{c^2}{(c-1)^2}\right\}-\frac{c^4}{(c-1)^4}=\frac{c^4}{a^2b^2}+\frac{c^4}{a^2(c-1)^2}+\frac{c^4}{b^2(c-1)^2}=\frac{(c-1)^2+b^2+a^2}{a^2b^2(c-1)^2}c^4=\frac{c^4}{a^2b^2(c-1)^2}$$

$$2S=\frac{c^2}{ab(c-1)}$$

$\frac{c^2}{ab(c-1)}$ —① の最小値を求める



$a=\sin\theta\cos\varphi$, $b=\sin\theta\sin\varphi$, $c=\cos\theta+1$　$\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}, 0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと

①は $\frac{(\cos\theta+1)^{\cancel{2}}}{(1-\cos\theta)\cancel{(1+\cos\theta)}\sin\varphi\cos\varphi\cdot\cos\theta}=\frac{\cos\theta+1}{-\cos^2\theta+\cos\theta}\ \frac{1}{\frac{1}{2}\sin2\varphi}$ となる。

$f(x)=\frac{x+1}{-x^2+x}$　$(0<x<1)$ を考える。

$$f'(x)=\frac{-x^2+x-(x+1)(-2x+1)}{(-x^2+x)^2}=\frac{-x^2+\cancel{x}+2x^2-\cancel{x}+2x-1}{(-x^2+x)^2}=\frac{x^2+2x-1}{(-x^2+x)^2}$$

$f'(x)=0$ のとき、$x=-1\pm\sqrt{1+1}=-1\pm\sqrt{2}$

x	0	$\cdots$	$-1+\sqrt{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$2\sqrt{2}+3$	$\nearrow$	

$f(x)$の増減表は左表のようになる。

$f(x)$の最小値は $2\sqrt{2}+3$.

$$f(-1+\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}}{-1+2\sqrt{2}-2-1+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(3\sqrt{2}+4)}{(3\sqrt{2}-4)(3\sqrt{2}+4)}=\frac{4\sqrt{2}+6}{18-16}=2\sqrt{2}+3$$

よって $\frac{\cos\theta+1}{-\cos^2\theta+\cos\theta}$ の最小値は $2\sqrt{2}+3$.　また $\frac{1}{\frac{1}{2}\sin2\varphi}$ の最小値は 2.

ゆえに①の最小値は $4\sqrt{2}+6$.

このとき $S=2\sqrt{2}+3$ であるから、Sの最小値は $2\sqrt{2}+3$.