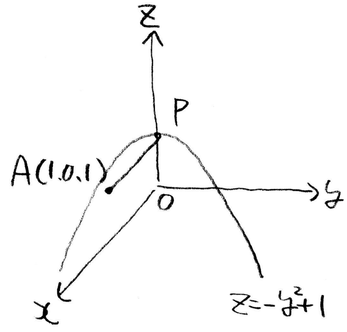
東大理科　1987前期　④



$P(0, p, -p^2+1)$ とおく.

直線AP上の点は $(1,0,1)+k(-1,p,-p^2)=(-k+1, kp, -kp^2+1)$ とおける

平面 $x=X$ と直線APの交点は

$-k+1=X$, $k=-X+1$ より $(X, (-X+1)p, -(-X+1)p^2+1)$

$(X,0,0)$ と $(X, (-X+1)p, -(-X+1)p^2+1)$ のキョリの2乗は

$(X^2-2X+1)p^2+(X^2-2X+1)p^4-2(-X+1)p^2+1$

$=(p^2+p^4)X^2+(\cancel{-2p^2}-2p^4\cancel{+2p^2})X+p^2+p^4-2p^2+1$

$=(p^4+p^2)X^2-2p^4X+p^4-p^2+1$

よって $V=\pi\int_0^1\{(p^4+p^2)X^2-2p^4X+p^4-p^2+1\}dX=\pi\left[(p^4+p^2)\frac{X^3}{3}-\cancel{2}p^4\frac{X^2}{\cancel{2}}+(p^4-p^2+1)X\right]_0^1$

$=\pi\left(\frac{1}{3}p^4+\frac{1}{3}p^2\cancel{-p^4}\cancel{+p^4}-p^2+1\right)=\left(\frac{1}{3}p^4-\frac{2}{3}p^2+1\right)\pi$

$V=\left\{\frac{1}{3}(p^4-2p^2+1)+\frac{2}{3}\right\}\pi=\left\{\frac{1}{3}(p^2-1)^2+\frac{2}{3}\right\}\pi$ より Vの最小値は $\frac{2}{3}\pi$