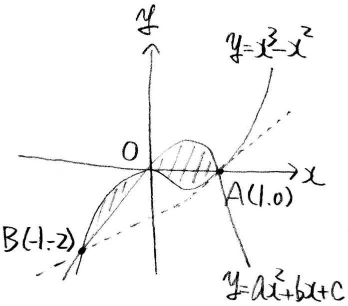
東大文科 1988前期 ④



$y=x^3-x^2$ のAにおける接線の方程式は $y=x-1$

$x^3-x^2=x-1$ $(x-1)^2(x+1)=0$ より Bの座標は $(-1,-2)$

$y=ax^2+bx+c$ は $(1,0)$, $(-1,-2)$ を通るから

$a+b+c=0$, $c=-a-b$

$a-b-a-b=-2$, $b=1$, $c=-a-1$

$$\begin{array}{r} x+1 \\ x^2-2x+1 \,\big)\, x^3-x^2-x+1 \\ x^3-2x^2+x \\ \hline x^2-2x+1 \\ x^2-2x+1 \\ \hline 0 \end{array}$$

$x^3-x^2=ax^2+x-a-1$ $(x+1)(x-1)\{x-(a+1)\}=0$ より

$y=x^3-x^2$ と $y=ax^2+x-a-1$ が AとBのあいだに共有点をもつには

$-1<a+1<1$, $-2<a<0$ であればよい

$$\begin{array}{r} x-(a+1) \\ x^2-1 \,\big)\, x^3-(a+1)x^2-x+a+1 \\ x^3 \qquad\qquad -x \qquad \\ \hline -(a+1)x^2 \quad +a+1 \\ -(a+1)x^2 \quad +a+1 \\ \hline 0 \end{array}$$

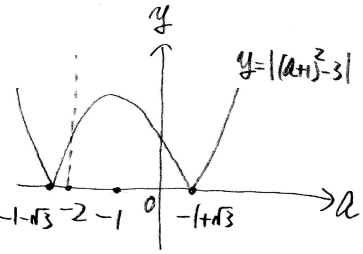
求める面積は $\int_{-1}^{a+1}\{x^3-(a+1)x^2-x+a+1\}dx+\int_{a+1}^{1}\{-x^3+(a+1)x^2+x-(a+1)\}dx$

$=\left[\frac{x^4}{4}-(a+1)\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+(a+1)x\right]_{-1}^{a+1}+\left[-\frac{x^4}{4}+(a+1)\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-(a+1)x\right]_{a+1}^{1}$

$=\frac{1}{4}(a+1)^4-\frac{1}{3}(a+1)^4-\cancel{\frac{1}{2}(a+1)^2}+(a+1)^2-\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{3}(a+1)}+\frac{1}{2}+\cancel{(a+1)}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cancel{\frac{1}{3}(a+1)}+\frac{1}{2}-\cancel{(a+1)}+\frac{1}{4}(a+1)^4-\frac{1}{3}(a+1)^4-\frac{1}{2}(a+1)^2+(a+1)^2$

$=\frac{3-4}{6}(a+1)^4+(a+1)^2+\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}\{(a+1)^4-6(a+1)^2+9\}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}\{(a+1)^2-3\}^2+2$

これが最小となるためには $|(a+1)^2-3|$ が最大となればよい



左図より $-2<a<0$ のとき

$|(a+1)^2-3|$ は $a=-1$ のとき最大となる

よって $a=-1$, $b=1$, $c=0$

※ $(a+1)^2-3=0$ のとき

$a^2+2a-2=0$, $a=-1\pm\sqrt{1+2}=-1\pm\sqrt{3}$