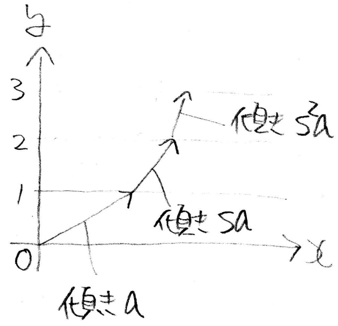
東大理科　1988前期　④



$y=n$ のときの P の x 座標を X_n とする

(X_n, n) を通り傾きが $s^n a$ の直線の方程式は

$y-n=s^n a(x-X_n)$ であり

これと $y=n+1$ の交点の x 座標は

$n+1-n=s^n a(x-X_n)$, $x=\frac{1}{s^n a}+X_n$ より $\frac{1}{s^n a}+X_n$ であるから

$$X_{n+1}=\frac{1}{s^n a}+X_n$$

よって $X_n=\frac{1}{s^{n-1}a}+X_{n-1}=\frac{1}{s^{n-1}a}+\frac{1}{s^{n-2}a}+X_{n-2}=\cdots=\frac{1}{s^{n-1}a}+\frac{1}{s^{n-2}a}+\cdots+\frac{1}{sa}+X_1$

$X_1=\frac{1}{a}$ であるから $X_n=\frac{1}{a}\left\{1+\left(\frac{1}{s}\right)+\left(\frac{1}{s}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{s}\right)^{n-1}\right\}=\begin{cases}\frac{1}{a}\frac{1-\left(\frac{1}{s}\right)^n}{1-\frac{1}{s}} & (s\neq 1\text{ のとき})\\ \frac{n}{a} & (s=1\text{ のとき})\end{cases}$

$s>1$ のとき $\lim_{n\to\infty}X_n=\frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{1}{s}}$

$s=1$ のとき $\lim_{n\to\infty}X_n=\infty$

$0<s<1$ のとき $\lim_{n\to\infty}X_n=\infty$

よって求める条件は、$0<s\leqq 1$、または、$s>1$ かつ $\ell<\frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{1}{s}}$