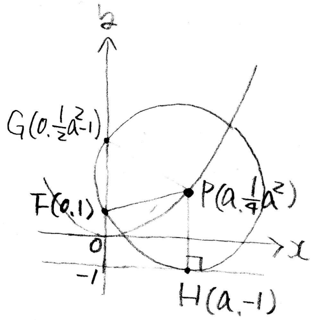
東大理科　1989前期　②

焦点が$(0, p)$、準線が$y=-p$である放物線の方程式は$x^2=4py$であるから

放物線の方程式は$x^2=4y$、$y=\frac{1}{4}x^2$



Cは中心$(a, \frac{1}{4}a^2)$、半径$\frac{1}{4}a^2+1$であるから

Cの方程式は$(x-a)^2+(y-\frac{1}{4}a^2)^2=(\frac{1}{4}a^2+1)^2$

$x=0$とすると、$a^2+y^2-\frac{1}{2}a^2y+\frac{1}{16}a^4=\frac{1}{16}a^4+\frac{1}{2}a^2+1$

$y^2-\frac{1}{2}a^2y+\frac{1}{2}a^2-1=0$、$(y+1)(y-1)-\frac{1}{2}a^2(y-1)=0$

$(y-\frac{1}{2}a^2+1)(y-1)=0$であるから　Gのy座標は$\frac{1}{2}a^2-1$

$T(a)=(\frac{1}{2}a^2-2)a\frac{1}{2}=\frac{1}{4}a^3-a$

$\triangle PFH$の面積は$(\frac{1}{4}a^2+1)a\frac{1}{2}=\frac{1}{8}a^3+\frac{1}{2}a$

$(0, -1)$をIとして四角形PFIHの面積は$(\frac{1}{4}a^2+1+2)\frac{1}{2}a=\frac{1}{8}a^3+\frac{3}{2}a$

よって　$\frac{1}{8}a^3+\frac{1}{2}a<S(a)<\frac{1}{8}a^3+\frac{3}{2}a$

$\dfrac{\frac{1}{4}a^3-a}{\frac{1}{8}a^3+\frac{3}{2}a}<\dfrac{T(a)}{S(a)}<\dfrac{\frac{1}{4}a^3-a}{\frac{1}{8}a^3+\frac{1}{2}a}$、$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\dfrac{\frac{1}{4}a^3-a}{\frac{1}{8}a^3+\frac{3}{2}a}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}}=2$、$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\dfrac{\frac{1}{4}a^3-a}{\frac{1}{8}a^3+\frac{1}{2}a}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}}=2$であるから

はさみうちの原理より$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\dfrac{T(a)}{S(a)}=2$