東大理科　1989前期　④

$$\frac{10^{210}}{10^{10}+3}=\frac{10^{200}}{1+\frac{3}{10^{10}}}\qquad \log_{10}\frac{10^{200}}{1+\frac{3}{10^{10}}}=200-\log_{10}\left(1+\frac{3}{10^{10}}\right)$$

$0<\log_{10}\left(1+\frac{3}{10^{10}}\right)<1$ より $199<\log_{10}\frac{10^{200}}{1+\frac{3}{10^{10}}}<200$ ， $\log_{10}10^{199}<\log_{10}\frac{10^{200}}{1+\frac{3}{10^{10}}}<\log_{10}10^{200}$

$10^{199}<\frac{10^{210}}{10^{10}+3}<10^{200}$ よって 200けた

$10^{10}=x$ とおくと $\frac{10^{210}}{10^{10}+3}=\frac{x^{21}}{x+3}=\frac{-3^{20}\left(-\frac{x}{3}\right)^{21}}{1-\left(-\frac{x}{3}\right)}$ —①

$1+\left(-\frac{x}{3}\right)+\cdots+\left(-\frac{x}{3}\right)^{20}=\frac{1-\left(-\frac{x}{3}\right)^{21}}{1-\left(-\frac{x}{3}\right)}$ 　 $1+\left(-\frac{x}{3}\right)+\cdots+\left(-\frac{x}{3}\right)^{20}-\frac{3}{x+3}=-\frac{\left(-\frac{x}{3}\right)^{21}}{1-\left(-\frac{x}{3}\right)}$ より

$$①=3^{20}\left\{1+\left(-\frac{x}{3}\right)+\cdots+\left(-\frac{x}{3}\right)^{20}-\frac{3}{x+3}\right\}=3^{20}+\underbrace{3^{19}(-x)+3^{18}(-x)^2+\cdots+3(-x)^{19}+(-x)^{20}}-\frac{3^{21}}{x+3}\quad —②$$

②において，波線部は 0以上の10の倍数である —③

$3^{21}=10460353203$ より $10^{10}+3<3^{21}<2(10^{10}+3)$ ， $1<\frac{3^{21}}{10^{10}+3}<2$ —④

```
     3486784401
 3 ) 10460353203
      9
      14
      12
       26
       24
        20
        18
         23
         21
          25
          24
           13
           12
            12
            12
              3
              3
              0
```

3^{20} の1の位の数字は 1 —⑤

③④⑤より 1の位の数字は 9

※補足 ◎ $0\times3=0$，$1\times3=3$，$2\times3=6$，$3\times3=9$，$4\times3=12$
$5\times3=15$，$6\times3=18$，$7\times3=21$，$8\times3=24$，$9\times3=27$ より
3^{21} の1の位の数字は3 より 3^{20} の1の位の数字は 1 —⑤ でもよい
（こちらのほうが楽？）

◎ $\frac{x^{21}}{x+3}$ に等比数列の和 $1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}=\frac{1-r^n}{1-r}$ が見える