東大理科 1990前期 ⑤

(必要条件)

P(a, 0)とする

Pを通り傾きがk ($k<0$)である直線の方程式は $y=k(x-a)$

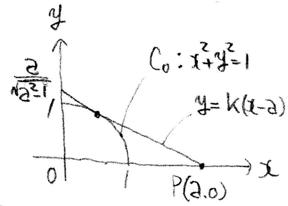
a>1でなければ これがC0に接することはないから a>1とする

これがC0に接するとき $x^2+\{k(x-a)\}^2=1$, $(k^2+1)x^2-2k^2ax+k^2a^2-1=0$ が重解を持てばよいから

$k^4a^2-(k^2+1)(k^2a^2-1)=0$. $\cancel{k^4a^2}-\cancel{k^4a^2}+k^2-k^2a^2+1=0$ $k^2(a^2-1)=1$. $k<0$ より $k=-\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}$

このとき 直線とy軸の交点のy座標は $\dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}}$

よって $b=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}}$ のときに限り P(a, 0)に対して条件を満たす平行四辺形が存在する

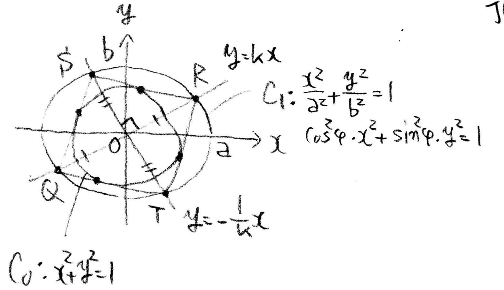


$b=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}}$ のとき $b^2(a^2-1)=a^2$, $a^2+b^2=a^2b^2$, $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$, このとき $a>1$, $b>1$ は満たされている

(十分条件)

$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$ であるとする このとき $\dfrac{1}{a}=\cos\varphi$ $\dfrac{1}{b}=\sin\varphi$ $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数φが存在する

頂点が(a, 0), (0, b), (−a, 0), (0, −b)である平行四辺形は上記よりC0に外接してC1に内接する



$y=kx$ ($k>0$) と C1の交点を左図のようにQ, Rとすると これの座標は

$\cos^2\varphi\cdot x^2+k^2\sin^2\varphi\cdot x^2=1$. $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{\cos^2\varphi+k^2\sin^2\varphi}}$. $y=\pm\dfrac{k}{\sqrt{\cos^2\varphi+k^2\sin^2\varphi}}$ より

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{\cos^2\varphi+k^2\sin^2\varphi}},\ \pm\frac{k}{\sqrt{\cos^2\varphi+k^2\sin^2\varphi}}\right) \text{ — ①}$$

これと原点のきょりの2乗は $\dfrac{k^2+1}{\cos^2\varphi+k^2\sin^2\varphi}$ — ②

$y=-\dfrac{1}{k}x$ と C1の交点を左図のようにS, Tとすると これの座標は

$\cos^2\varphi\cdot x^2+\dfrac{\sin^2\varphi}{k^2}x^2=1$ $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{\cos^2\varphi+\frac{\sin^2\varphi}{k^2}}}$, $y=\mp\dfrac{1}{k\sqrt{\cos^2\varphi+\frac{\sin^2\varphi}{k^2}}}$ より

$$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{\cos^2\varphi+\frac{\sin^2\varphi}{k^2}}},\ \mp\frac{1}{k\sqrt{\cos^2\varphi+\frac{\sin^2\varphi}{k^2}}}\right) \text{ — ③}$$

これと原点のきょりの2乗は $\dfrac{1+\frac{1}{k^2}}{\cos^2\varphi+\frac{\sin^2\varphi}{k^2}}=\dfrac{k^2+1}{k^2\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}$

$$=\frac{k^2+1}{\cos^2\varphi+k^2\sin^2\varphi}\cdot\frac{1}{\frac{k^2(1-\sin^2\varphi)+1-\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi+k^2\sin^2\varphi}}=\frac{\frac{k^2+1}{\cos^2\varphi+k^2\sin^2\varphi}}{\frac{k^2+1}{\cos^2\varphi+k^2\sin^2\varphi}-1} \text{ — ④}$$

$y=kx$ と $y=-\frac{1}{k}x$ は直交する

対称性より OQ=OR, OS=OT

よって QS=QT=RS=RT より

四角形QSRTはひし形であり

ひし形は平行四辺形である

四角形QSRTはC1に内接する

②で $\dfrac{k^2+1}{\cos^2\varphi+k^2\sin^2\varphi}=A^2$ とすると ④は $\dfrac{A^2}{A^2-1}$ となり 最初の議論より 例えば直線QSはC0に接するから

四角形QSRTはC0に外接する

以上より 求める条件は $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1$

※補足 必要条件は まずC1上の特定の点(a, 0)の場合について考える

十分条件を示すのが難しかった