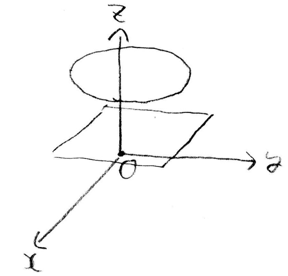
東大理科 1991前期 ②



$(a\cos\theta,\ b\sin\theta,\ c+1),\ (\alpha,\beta,c)\ (-a\leqq\alpha\leqq a,\ -b\leqq\beta\leqq b)$ を通る直線と xy平面の交点 (X,Y) の存在する領域を求める

直線の方程式は $(x,y,z)=(a\cos\theta,\ b\sin\theta,\ c+1)+k(\alpha-a\cos\theta,\ \beta-b\sin\theta,\ -1)$

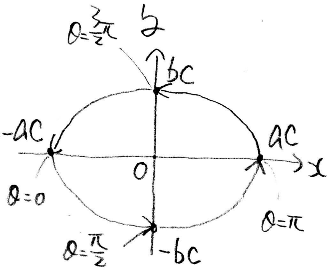
$z=0$ のとき $k=c+1$

$x=\cancel{a\cos\theta}+\alpha c-ac\cos\theta+\alpha-\cancel{a\cos\theta}=-ac\cos\theta+\alpha(c+1)$

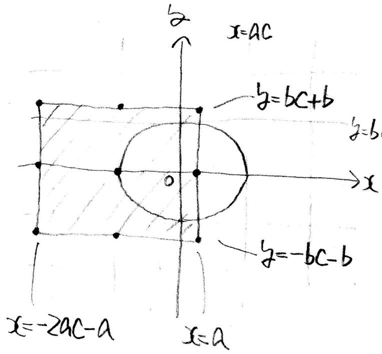
$y=\cancel{b\sin\theta}+\beta c-bc\sin\theta+\beta-\cancel{b\sin\theta}=-bc\sin\theta+\beta(c+1)$ であるから

$-ac\cos\theta-a(c+1)\leqq X\leqq -ac\cos\theta+a(c+1)$

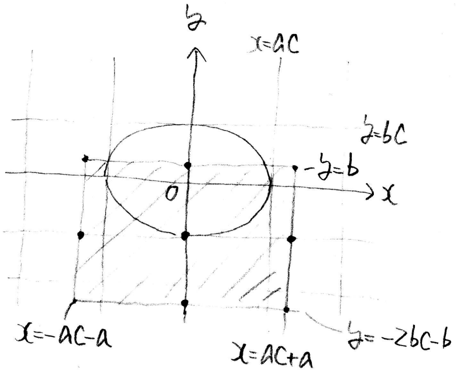
$-bc\sin\theta-b(c+1)\leqq Y\leqq -bc\sin\theta+b(c+1)$



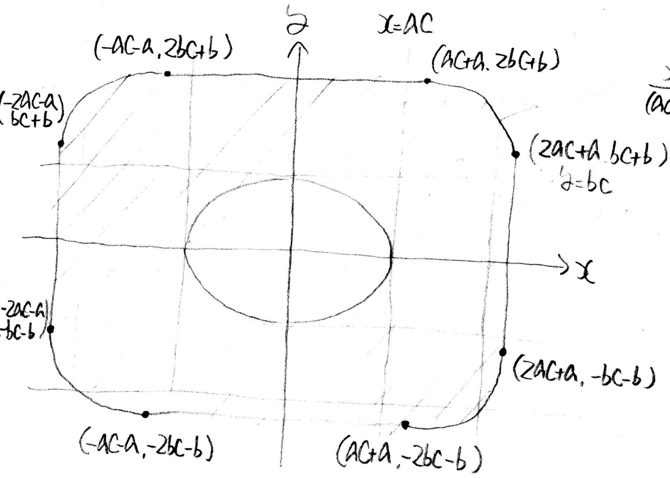
$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-ac\cos\theta\\-bc\sin\theta\end{pmatrix}$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ の軌跡は楕円であり、左図のようになる



$\theta=0$ のときの (X,Y) の存在する領域は左図の斜線部になる



$\theta=\frac{\pi}{2}$ のときの (X,Y) の存在する領域は左図の斜線部になる



$\frac{x^2}{(ac)^2}+\frac{y^2}{(bc)^2}=1$ $(x\geqq0, y\geqq0)$ を x方向に $ac+a$、y方向に $bc+b$ 平行移動したもの

影の通過する部分は上図の斜線部になり

面積は $4(2ac+a)(2bc+b)-(4acbc-\pi acbc)$

$=4(4abc^2+2abc+2abc+ab-abc^2)+\pi abc^2$

$=4(3abc^2+4abc+ab)+\pi abc^2$

$=4ab(3c^2+4c+1)+\pi abc^2$