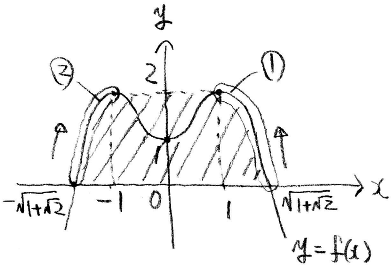
東大文科 1993前期 ④

$f(x)=-x^4+2x^2+1$ とする. $f'(x)=-4x^3+4x=-4x(x^2-1)=-4x(x+1)(x-1)$　$f'(x)=0$ のとき $x=0,\pm1$

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↗ | $2$ | ↘ | $1$ | ↗ | $2$ | ↘ |

$f(x)$ の増減表は左表

$f(x)$ のグラフは右図




※ $x^4-2x^2-1=0$ のとき

$x^2=1\pm\sqrt{1+1}=1\pm\sqrt{2}$, $x^2>0$ より $x^2=1+\sqrt{2}$

$x=\pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$

$g_1(t)$ の値は、$t$ が $0$ から $2$ へ動くとき

① 上を $(\sqrt{1+\sqrt{2}},0)$ から $(1,2)$ まで動く点の

$x$ 座標の値である.

$g_2(t)$ の値は、$t$ が $0$ から $2$ へ動くとき

② 上を $(-\sqrt{1+\sqrt{2}},0)$ から $(-1,2)$ まで動く点の

$x$ 座標の値である.

よって、$\int_0^2 (g_1(t)-g_2(t))\,dt$ は右図の斜線部の面積に等しいから

$$\int_0^2 (g_1(t)-g_2(t))\,dt = 2\int_1^{\sqrt{1+\sqrt{2}}}(-x^4+2x^2+1)\,dx+4=2\left[-\frac{x^5}{5}+2\frac{x^3}{3}+x\right]_1^{\sqrt{1+\sqrt{2}}}+4$$

$$=2\left\{-\frac{1}{5}(1+\sqrt{2})^2\sqrt{1+\sqrt{2}}+\frac{2}{3}(1+\sqrt{2})\sqrt{1+\sqrt{2}}+\sqrt{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{5}-\frac{2}{3}-1\right\}+4=2\left\{-\frac{1}{5}(3+2\sqrt{2})+\frac{2}{3}(1+\sqrt{2})+1\right\}\sqrt{1+\sqrt{2}}+2\cdot\frac{3-10-15}{15}+4$$

$$=2\left(\frac{-9+10+15}{15}+\frac{-6+10}{15}\sqrt{2}\right)\sqrt{1+\sqrt{2}}-\frac{44}{15}+4=\left(\frac{32}{15}+\frac{8}{15}\sqrt{2}\right)\sqrt{1+\sqrt{2}}+\frac{16}{15}=\frac{8}{15}\left\{(4+\sqrt{2})\sqrt{1+\sqrt{2}}+2\right\}$$