東大理科　1993前期　②

(1) xは任意の整数を表す記号であるとする.

$a_1=2x+1$

$a_2=2x+1$

$a_3=3(2x+1)-7(2x+1)=2x+3-7=2x+7-7=2x$

$a_4=3\cdot 2x-7(2x+1)=2x-7=2x+8-7=2x+1$

$a_5=3(2x+1)-7\cdot 2x=2x+3=2x+1$

よってmを$m\geqq 0$を満たす整数とすると

$a_{3m+1}=2x+1$

$a_{3m+2}=2x+1$

$a_{3m+3}=2x$

ゆえに題意は示された.

(2) $a_1=10x+1$

$a_2=10x+3$

$a_3=3(10x+3)-7(10x+1)=10x+9-7=10x+2$

$a_4=3(10x+2)-7(10x+3)=10x+6-21=10x+26-21=10x+5$

$a_5=3(10x+5)-7(10x+2)=10x+15-14=10x+1$

$a_6=3(10x+1)-7(10x+5)=10x+3-35=10x+43-35=10x+8$

$a_7=3(10x+8)-7(10x+1)=10x+24-7=10x+14-7=10x+7$

$a_8=3(10x+7)-7(10x+8)=10x+21-56=10x+61-56=10x+5$

$a_9=3(10x+5)-7(10x+7)=10x+15-49=10x+55-49=10x+6$

$a_{10}=3(10x+6)-7(10x+5)=10x+18-35=10x+38-35=10x+3$

$a_{11}=3(10x+3)-7(10x+6)=10x+9-42=10x+49-42=10x+7$

$a_{12}=3(10x+7)-7(10x+3)=10x+21-21=10x$

$a_{13}=3\cdot 10x-7(10x+7)=10x-49=10x+50-49=10x+1$

$a_{14}=3(10x+1)-7\cdot 10x=10x+3$

よって

$a_{12m+1}=10x+1$

$a_{12m+2}=10x+3$

$a_{12m+3}=10x+2$

$a_{12m+4}=10x+5$

$a_{12m+5}=10x+1$

$a_{12m+6}=10x+8$

$a_{12m+7}=10x+7$

$a_{12m+8}=10x+5$

$a_{12m+9}=10x+6$

$a_{12m+10}=10x+3$

$a_{12m+11}=10x+7$

$a_{12m+12}=10x$

ゆえに

a_nが10の倍数となることと

nが12の倍数となることは

同値であることが示された.