東大理科　1993前期　5

$S_n$の、1文字目が1の確率を$a_n$，2文字目が0の確率を$b_n$，3文字目が1の確率を$c_n$
4文字目が1の確率を$d_n$，5文字目が0の確率を$e_n$とする.

$a_{n+1}=a_n(1-q)+(1-a_n)p$ ，$a_{n+1}=(-p-q+1)a_n+p$　　$\alpha=(-p-q+1)\alpha+p$. $\alpha=\frac{p}{p+q}$

$a_{n+1}-\frac{p}{p+q}=(-p-q+1)\left(a_n-\frac{p}{p+q}\right)$

$n\geqq 2$のとき

$a_n-\frac{p}{p+q}=(-p-q+1)\left(a_{n-1}-\frac{p}{p+q}\right)=(-p-q+1)^2\left(a_{n-2}-\frac{p}{p+q}\right)=\cdots=(-p-q+1)^{n-1}\left(a_1-\frac{p}{p+q}\right)$

$a_1=1-q$であるから. $a_n=\{1-(p+q)\}^{n-1}\left(1-q-\frac{p}{p+q}\right)+\frac{p}{p+q}$

また　$c_n=a_n$，$d_n=a_n$　である.

$b_{n+1}=b_n(1-p)+(1-b_n)q$，$b_{n+1}=(-p-q+1)b_n+q$　　$\beta=(-p-q+1)\beta+q$. $\beta=\frac{q}{p+q}$

$b_{n+1}-\frac{q}{p+q}=(-p-q+1)\left(b_n-\frac{q}{p+q}\right)$

$n\geqq 2$のとき

$b_n-\frac{q}{p+q}=(-p-q+1)\left(b_{n-1}-\frac{q}{p+q}\right)=(-p-q+1)^2\left(b_{n-2}-\frac{q}{p+q}\right)=\cdots=(-p-q+1)^{n-1}\left(b_1-\frac{q}{p+q}\right)$

$b_1=1-p$　であるから　$b_n=\{1-(p+q)\}^{n-1}\left(1-p-\frac{q}{p+q}\right)+\frac{q}{p+q}$

また　$e_n=b_n$　である.

$C(n)=a_nb_nc_nd_ne_n=\left[\{1-(p+q)\}^{n-1}\left(1-q-\frac{p}{p+q}\right)+\frac{p}{p+q}\right]^3\left[\{1-(p+q)\}^{n-1}\left(1-p-\frac{q}{p+q}\right)+\frac{q}{p+q}\right]^2$

$|1-(p+q)|<1$　であるから. $\lim_{n\to\infty}C(n)=\frac{p^3q^2}{(p+q)^5}$