(1)
$$1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6$$
$$\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow\quad\downarrow$$
$$q\quad q\quad p\quad 1-p-q\quad q\quad q$$

$a+b\leqq 4$ となるのは $(a,b)=(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)$
$$q^2\quad\quad q^2\quad\quad pq\quad\quad q^2\quad\quad q^2\quad\quad pq$$

よって $P(A)=2pq+4q^2$

$a<b$ となるのは $(a,b)=(1,2)\,(1,3)\,(1,4)\,(1,5)\,(1,6)\,(2,3)\,(2,4)\,(2,5)\,(2,6)$
$$q^2\quad pq\quad -pq-q^2+q\quad q^2\quad q^2\quad pq\quad -pq-q^2+q\quad q^2\quad q^2$$

$$(3,4)\quad(3,5)\quad(3,6)\quad(4,5)\quad(4,6)\quad(5,6)$$
$$-p^2-pq+p\quad pq\quad pq\quad -pq-q^2+q\quad -pq-q^2+q\quad q^2$$

よって $P(B)=-p^2-pq+p-pq-q^2+q^2+4q^2+6q^2=-p^2-pq+p-10q^2+4q$

 P(2)に $E=4pq+8q^2-p^2-pq+p-10q^2+4q=-p^2+p-2q^2+4q$

(2) (1)より $E=-(p^2-p+\frac{1}{4})+\frac{1}{4}-2(q^2-2q+1)+2=-(p-\frac{1}{2})^2-2(q-1)^2+\frac{9}{4}$

m,n を自然数とすると $\frac{1}{p}=m,\ \frac{1}{q}=n$ であるから $p=\frac{1}{m},\ q=\frac{1}{n}$

$0<p<1,\ 0<4q<1,\ p+4q<1$ でなければならないから p,q は左図の斜線部にある
(境界線上の点)は含まない
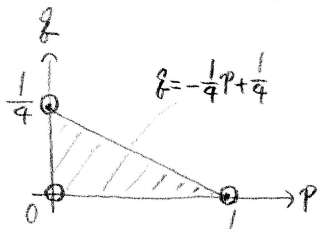
$q=-\frac{1}{4}p+\frac{1}{4}$

$p=\frac{1}{2}$ のとき $-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2-1}{8}=\frac{1}{8}$ より q の最大値は $\frac{1}{9}$

$p=\frac{1}{3}$ 〃 $-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{3-1}{12}=\frac{1}{6}$ 〃 $\frac{1}{7}$

$p=\frac{1}{4}$ 〃 $-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{4-1}{16}=\frac{1}{\frac{16}{3}}=\frac{1}{5.\cdots}$ 〃 $\frac{1}{6}$

$p=\frac{1}{5}$ 〃 $-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{4}=\frac{5-1}{20}=\frac{1}{5}$ 〃 $\frac{1}{6}$

$p=\frac{1}{6}$ 〃 $-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{6-1}{24}=\frac{1}{\frac{24}{5}}=\frac{1}{4.\cdots}$ 〃 $\frac{1}{5}$

よって $p\leqq\frac{1}{6}$ のとき q の最大値は $\frac{1}{5}$

E の値を最大にするような p,q は $(p,q)=(\frac{1}{2},\frac{1}{9}),(\frac{1}{3},\frac{1}{7}),(\frac{1}{4},\frac{1}{6}),(\frac{1}{6},\frac{1}{5})$ のどれかである

$(p,q)=(\frac{1}{2},\frac{1}{9})$ のとき $E=-2(-\frac{8}{9})^2+\frac{9}{4}=-\frac{128}{81}+\frac{9}{4}=-1.5\cdots+\frac{9}{4}$

$(p,q)=(\frac{1}{3},\frac{1}{7})$ のとき $E=-(\frac{2-3}{6})^2-2(-\frac{6}{7})^2+\frac{9}{4}=-\frac{1}{36}-\frac{72}{49}+\frac{9}{4}=-\frac{49+2592}{1764}+\frac{9}{4}=-\frac{2592}{1764}+\frac{9}{4}=-1.4\cdots+\frac{9}{4}$

$(p,q)=(\frac{1}{4},\frac{1}{6})$ のとき $E=-(\frac{1-2}{4})^2-2(-\frac{5}{6})^2+\frac{9}{4}=-\frac{1}{16}-\frac{25}{18}+\frac{9}{4}=-\frac{9+200}{144}+\frac{9}{4}=-\frac{209}{144}+\frac{9}{4}=-1.4\cdots+\frac{9}{4}$

$(p,q)=(\frac{1}{6},\frac{1}{5})$ のとき $E=-(\frac{1-3}{6})^2-2(-\frac{4}{5})^2+\frac{9}{4}=-\frac{1}{9}-\frac{32}{25}+\frac{9}{4}=-\frac{25+288}{225}+\frac{9}{4}=-\frac{313}{225}+\frac{9}{4}=-1.3\cdots+\frac{9}{4}$

$$\begin{array}{c}49\\\times36\\\hline294\\147\\\hline1764\end{array}\qquad\begin{array}{c}72\\\times36\\\hline432\\216\\\hline2592\end{array}\qquad\begin{array}{c}2592\\+\ 49\\\hline2641\end{array}$$

$$81\overline{)128}\ 1.5\quad 1764\overline{)2592}\ 1.4\quad 144\overline{)209}\ 1.4\quad 225\overline{)313}\ 1.3$$
$$\begin{array}{l}81\\\hline470\\405\\\hline65\end{array}\qquad\begin{array}{l}1764\\\hline8280\\7056\\\hline1224\end{array}\qquad\begin{array}{l}144\\\hline650\\576\\\hline74\end{array}\qquad\begin{array}{l}225\\\hline880\\675\\\hline205\end{array}$$

よって $(p,q)=(\frac{1}{6},\frac{1}{5})$