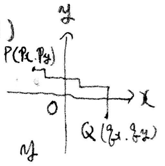
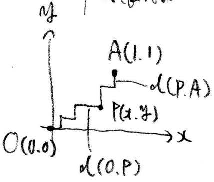
東大理科 1994前期 ⑥

(1)



$P(p_x, p_y)$, $Q(q_x, q_y)$ とすると $d(P,Q)=|p_x-q_x|+|p_y-q_y|$



$d(O,P)=d(P,A)$ のとき $|x|+|y|=|x-1|+|y-1|$ —①

(i) $x<0$ のとき ①は $-x+|y|=-x+1+|y-1|$, $|y|=1+|y-1|$ —②

$y<0$ のとき ②は $-y=1-y+1$　$0=2$ これは矛盾

$0\leqq y\leqq 1$ のとき ②は $y=1-y+1$　$y=1$

$y>1$ のとき ②は $y=1+y-1$　$0=0$ よって②はつねに成立つ

(ii) $0\leqq x\leqq 1$ のとき ①は $x+|y|=-x+1+|y-1|$, $2x+|y|=1+|y-1|$ —③

$y<0$ のとき③は $2x-y=1-y+1$　$x=1$

$0\leqq y\leqq 1$ のとき ③は $2x+y=1-y+1$, $y=-x+1$

$y>1$ のとき ③は $2x+y=1+y-1$　$x=0$

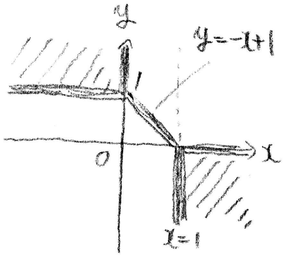
(iii) $x>1$ のとき ①は $x+|y|=x-1+|y-1|$　$1+|y|=|y-1|$ —④

$y<0$ のとき ④は $1-y=-y+1$　$1=1$ よって④はつねに成立つ

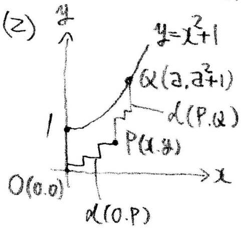
$0\leqq y\leqq 1$ のとき ④は $1+y=-y+1$　$y=0$

$y>1$ のとき ④は $1+y=y-1$, $1=-1$ これは矛盾

以上より右図の斜線部と太線部



(2)



a を $a\geqq 0$ の範囲で動かしたときの $d(O,P)=d(P,Q)$ となる点P(x,y)の動く範囲を求めればよい

$d(O,P)=d(P,Q)$ のとき $|x|+|y|=|x-a|+|y-a^2-1|$ —⑤

(i) $x<0$ のとき ⑤は $-x+|y|=-x+a+|y-a^2-1|$　$|y|=a+|y-a^2-1|$ —⑥

$y<0$ のとき ⑥は $-y=a-y+a^2+1$　$0=a^2+a+1$ これは矛盾

$0\leqq y\leqq a^2+1$ のとき ⑥は $y=a-y+a^2+1$　$y=\frac{a^2+a+1}{2}$

$a^2+1-\frac{a^2+a+1}{2}=\frac{a^2-a+1}{2}=\frac{(a-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}{2}>0$ より $\frac{a^2+a+1}{2}<a^2+1$

$y>a^2+1$ のとき ⑥は $y=a+y-a^2-1$, $0=-(a-\frac{1}{2})^2-\frac{3}{4}$ これは矛盾

$\frac{a^2+a+1}{2}$ は $a=0$ のとき最小値 $\frac{1}{2}$ をとるから $x<0$ のとき点P(x,y)の動く範囲は $y\geqq\frac{1}{2}$

(ii) $0\leqq x\leqq a$ のとき ⑤は $x+|y|=-x+a+|y-a^2-1|$, $2x+|y|=a+|y-a^2-1|$ —⑦

$y<0$ のとき ⑦は $2x-y=a-y+a^2+1$　$x=\frac{a^2+a+1}{2}$　$a-\frac{a^2+a+1}{2}=\frac{-(a-\frac{1}{2})^2-\frac{3}{4}}{2}<0$, $\frac{a^2+a+1}{2}>a$ より これは矛盾

$0\leqq y\leqq a^2+1$ のとき ⑦は $2x+y=a-y+a^2+1$, $y=-x+\frac{a^2+a+1}{2}$

$y>a^2+1$ のとき ⑦は $2x+y=a+y-a^2-1$　$x=\frac{-a^2+a-1}{2}$　$\frac{-a^2+a-1}{2}=\frac{-(a-\frac{1}{2})^2-\frac{3}{4}}{2}<0$ より これは矛盾

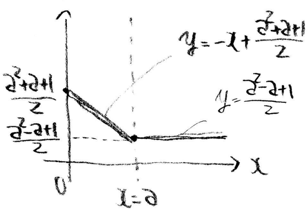
(iii) $x>a$ のとき ⑤は $x+|y|=x-a+|y-a^2-1|$　$a+|y|=|y-a^2-1|$ —⑧

$y<0$ のとき ⑧は $a-y=-y+a^2+1$　$a^2-a+1=0$, $(a-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}=0$ これは矛盾

$0\leqq y\leqq a^2+1$ のとき ⑧は $a+y=-y+a^2+1$　$y=\frac{a^2-a+1}{2}$, $a^2+1-\frac{a^2-a+1}{2}=\frac{(a+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}{2}>0$ より $\frac{a^2-a+1}{2}<a^2+1$

$y>a^2+1$ のとき ⑧は $a+y=y-a^2-1$　$a^2+a+1=0$ これは矛盾

$y=-x+\frac{a^2+a+1}{2}$ で $x=a$ とすると $x=\frac{a^2-a+1}{2}=\frac{(a-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}{2}>0$



よって a の値を固定したとき $x>0$ のとき点P(x,y)の動く範囲は左図の太線部

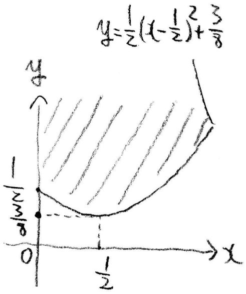
$y=-x+\frac{a^2+a+1}{2}$ と $x=k$ は $a\geqq k$ のとき交点を持ち

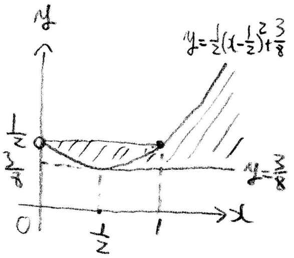
この y 座標は $-k+\frac{a^2+a+1}{2}$

これの最小値は $a^2+a+1=(a+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$ より

$a=k$ のとき $\frac{k^2-k+1}{2}=\frac{(k-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}{2}$

よって $0\leqq x\leqq a$ のとき点P(x,y)の動く範囲は右図の斜線部(境界線上の点含む)





$x>a$ のとき,

a を固定したときの

点P(x,y)の動く範囲は

$y=\frac{a^2-a+1}{2}=\frac{(a-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}{2}$ より

点P(x,y)の動く範囲は

左図の斜線部

(境界線上の点含む)

以上より右図の斜線部

(境界線上の点含む)