東大理科　1995前期　①

$x>0,\ y>0$ のときの $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{2x+y}}$ の最大値を求めればよい

$x>0,\ y>0$ のときの $\dfrac{x+2\sqrt{xy}+y}{2x+y}=\dfrac{\frac{x}{y}+2\sqrt{\frac{x}{y}}+1}{2\frac{x}{y}+1}$ の最大値を求めればよい.

$\sqrt{\frac{x}{y}}=X$ とおくと. $\dfrac{\frac{x}{y}+2\sqrt{\frac{x}{y}}+1}{2\frac{x}{y}+1}=\dfrac{X^2+2X+1}{2X^2+1}$

$X>0$ のときの $f(X)=\dfrac{X^2+2X+1}{2X^2+1}$ の最大値を求める.

$$f'(X)=\frac{(2X+2)(2X^2+1)-(X^2+2X+1)4X}{(2X^2+1)^2}=\frac{4X^3+2X+4X^2+2-4X^3-8X^2-4X}{(2X^2+1)^2}=\frac{-4X^2-2X+2}{(2X^2+1)^2}$$

$f'(X)=0$ のとき $2X^2+X-1=0$. $X=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\dfrac{-1\pm3}{4}=-1,\dfrac{1}{2}$. $X>0$ より $X=\dfrac{1}{2}$.

X	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(X)$	$+$	0	$-$
$f(X)$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$

$f(\frac{1}{2})=\dfrac{\frac{1}{4}+1+1}{\frac{1}{2}+1}=\dfrac{\frac{9}{4}}{\frac{3}{2}}=\dfrac{3}{2}$

$f(X)$ の増減表は左図のようになるから. $X>0$ のときの $f(X)$ の最大値は $\dfrac{3}{2}$.

$x>0,\ y>0$ のときの $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{2x+y}}$ の最大値は $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

よって k の最小値は $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$