東大理科　1996前期　④

(1) $a_n=1$ となるためには、$c_1, c_2 \cdots c_{n-1}$ がすべて1で $c_n=1$ であればよい。この確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6}$

$a_n=2$　〃　2以下　〃　$c_n=2$　〃　$\left(\frac{2}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6}$

$a_n=3$　〃　3以下　〃　$c_n=3$　〃　$\left(\frac{3}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6}$

$a_n=4$　〃　4以下　〃　$c_n=4$　〃　$\left(\frac{4}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6}$

$a_n=5$　〃　5以下　〃　$c_n=5$　〃　$\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6}$

$a_n=6$　〃　6以下　〃　$c_n=6$　〃　$\left(\frac{6}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6}$

よって $E(n)=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}+2\frac{1}{6}\left(\frac{2}{6}\right)^{n-1}+3\frac{1}{6}\left(\frac{3}{6}\right)^{n-1}+4\frac{1}{6}\left(\frac{4}{6}\right)^{n-1}+5\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+6\frac{1}{6}\left(\frac{6}{6}\right)^{n-1}$

$=\left(\frac{1}{6}\right)^{n}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n}+\left(\frac{5}{6}\right)^{n}+1$

$\lim_{n\to\infty}E(n)=1$

(2). サイコロをn回投げるとき すべての場合の数は 6^n 通り

この6^n通りの $a_1, a_2 \cdots a_n$ の組をすべて書き出すことを考える ―①

このときに現れる2の数を S_n とすると、$N(n)=\frac{S_n}{6^n}$ ―②

サイコロを $n+1$ 回投げるとき、すべての場合の数は 6^{n+1} 通り

$a_{n+1}=2$ である確率は $\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ であるから、$a_{n+1}=2$ となる場合の数は $6^{n+1}\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^n=2^n$ 通り ―③

6^{n+1}通りの $a_1, a_2 \cdots a_n, a_{n+1}$ の組をすべて書き出すと、

$a_1, a_2 \cdots a_n$ は①と同じものが、$n+1$回目に出た目によって、それぞれ6つになる ―④

③、④より $S_{n+1}=6S_n+2^n$　$\frac{S_{n+1}}{6^{n+1}}=\frac{S_n}{6^n}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^n$　$T_n=\frac{S_n}{6^n}$ とすると、$T_{n+1}=T_n+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$n\geqq 2$ のとき

$T_n=\cancel{T_{n-1}}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$\cancel{T_{n-1}}=\cancel{T_{n-2}}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$

$\vdots$

$+)\ \cancel{T_2}=T_1+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)$

$T_n=T_1+\frac{1}{6}\frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n$　これは $n=1$ のときも成立つ

※ $S_1=1$ より $T_1=\frac{1}{6}$　　$S_n=6^n\left\{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

②より $N(n)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n$　$\lim_{n\to\infty}N(n)=\frac{1}{4}$