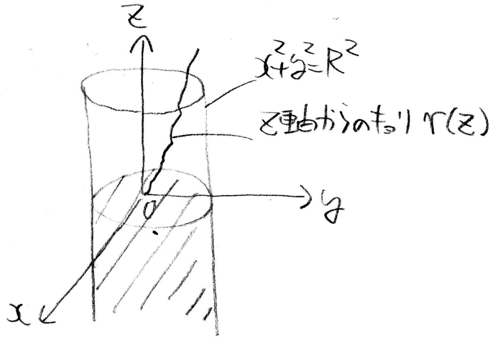
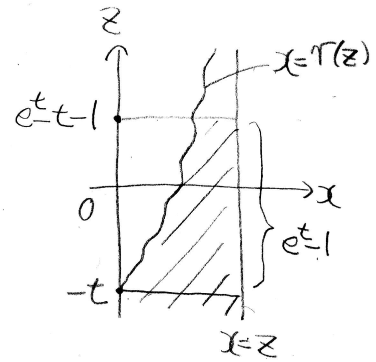
東大理科　1996前期　5





右上図より $\int_0^{e^t-1} \pi r(z)^2 dz + \pi R^2 t = \pi R^2(e^t-1)$ が成り立つ

$a(z)$ は $a'(z)=r(z)^2$ を満たすとすると $\int_0^{e^t-1} r(z)^2 dz = a(e^t-1)+C$　（Cは定数）となるから

$a(e^t-1)+C+R^2t = R^2(e^t-1)$

両辺を t で微分すると $a'(e^t-1)\cdot e^t + R^2 = R^2e^t$，$r(e^t-1)^2\cdot e^t + R^2 = R^2e^t$

$r(e^t-1)^2 = \dfrac{R^2(e^t-1)}{e^t}$，$r(e^t-1) = R\sqrt{\dfrac{e^t-1}{(e^t-1)+1}}$，よって $r(z) = R\sqrt{\dfrac{z}{z+1}}$