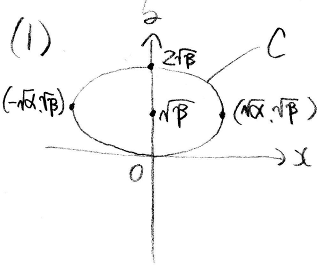
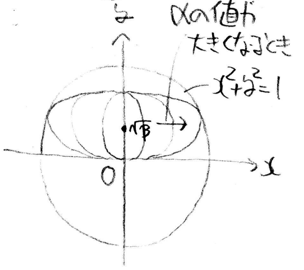
東大理科　1996前期　6

(1)





$0<\beta\leqq\frac{1}{4}$ である。

左図より、βの値を固定したときのαの値の最大値を求める。

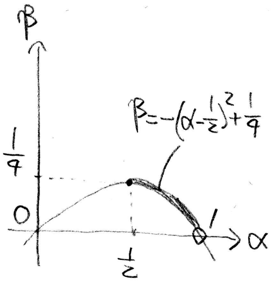
このとき C と円 $x^2+y^2=1$ は接するから

$\frac{-y^2+1}{\alpha}+\frac{(y-\sqrt{\beta})^2}{\beta}=1$　$-\beta y^2+\beta+\alpha y^2-2\alpha\sqrt{\beta}y+\cancel{\alpha\beta}=\cancel{\alpha\beta}$

$(\alpha-\beta)y^2-2\alpha\sqrt{\beta}y+\beta=0$ は重解を持ち、

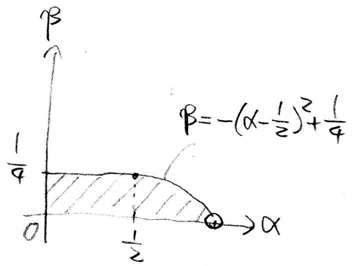
$\alpha^2\beta-(\alpha-\beta)\beta=0$　$\alpha^2-\alpha+\beta=0$

$\beta=-(\alpha^2-\alpha+\frac{1}{4})+\frac{1}{4}=-(\alpha-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}$ が成り立つ



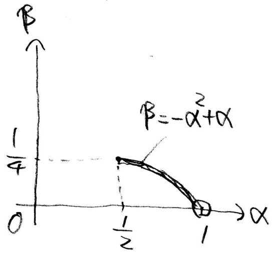
よって、βの値を固定したときのαの値の最大値は左図の太線部になるから

α, βの取り得る値は右図の斜線部になる



※境界線上の点含む
ただしα軸、β軸上の点は含まない

(2) C の面積は $\pi\sqrt{\alpha\beta}$ である。



左図の太線上の点での $\alpha\beta$ の値の最大値を求める。

$\alpha\beta=\alpha(-\alpha^2+\alpha)=-\alpha^3+\alpha^2$ である

$f(\alpha)=-\alpha^3+\alpha^2\ (\frac{1}{2}\leqq\alpha<1)$ とすると、

$f'(\alpha)=-3\alpha^2+2\alpha=-3\alpha(\alpha-\frac{2}{3})$ であるから

$f(\alpha)$ の増減表は左表のようになる

α	…	$\frac{2}{3}$	…
$f'(\alpha)$	+	0	−
$f(\alpha)$	↗	$\frac{4}{27}$	↘

$f(\frac{2}{3})=-\frac{8}{27}+\frac{4}{9}=\frac{12-8}{27}=\frac{4}{27}$

よって このときの $\alpha\beta$ の値の最大値は $\frac{4}{27}$

C の面積の最大値は $\pi\sqrt{\frac{4}{27}}=\pi\frac{2}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$