東大文科 1997前期 ①

(1) $a+b=\alpha$, $ab=\beta$ —① とする

このとき a, b は x についての2次方程式 $x^2-\alpha x+\beta=0$ の解であるから

①を満たす実数 a, b が存在するには $\alpha^2-4\beta\geqq 0$ でなければならない

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ より $\alpha^2=2\beta+16$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+3ab(a+b)+b^3$ より $\alpha^3=3\alpha\beta+44$

$\alpha^3=3\alpha(\frac{1}{2}\alpha^2-8)+44$, $\frac{1}{2}\alpha^3-24\alpha+44=0$, $\alpha^3-48\alpha+88=0$, $(\alpha-2)(\alpha^2+2\alpha-44)=0$

$$\begin{array}{r}
\alpha^2+2\alpha-44 \\
\alpha-2\,\overline{)\,\alpha^3 \qquad -48\alpha+88} \\
\underline{\alpha^3-2\alpha^2 \qquad\qquad} \\
2\alpha^2-48\alpha \\
\underline{2\alpha^2-4\alpha} \\
-44\alpha+88 \\
\underline{-44\alpha+88} \\
0
\end{array}$$

$\alpha=2, -1\pm\sqrt{1+44}$ $\alpha=2, -1\pm3\sqrt{5}$

$\alpha=2$ のとき $\beta=\frac{1}{2}4-8=-6$, $\alpha^2-4\beta=4+24\geqq 0$

$\alpha=-1+3\sqrt{5}$ のとき $\beta=\frac{1}{2}(1-6\sqrt{5}+45)-8=15-3\sqrt{5}$ $\alpha^2-4\beta=1-6\sqrt{5}+45-60+12\sqrt{5}=-14+6\sqrt{5}<-0.2<0$

$$\begin{array}{r} 2.3 \\ \times\ \ 6 \\ \hline 13.8 \end{array}$$

$\alpha=-1-3\sqrt{5}$ のとき $\beta=\frac{1}{2}(1+6\sqrt{5}+45)-8=15+3\sqrt{5}$ $\alpha^2-4\beta=1+6\sqrt{5}+45-60-12\sqrt{5}=-14-6\sqrt{5}<0$

以上より $a+b=2$

(2) $n=2, 3$ のとき a^n+b^n は4で割り切れる —②

mを2以上の整数として a^m+b^m, $a^{m+1}+b^{m+1}$ は4で割り切れると仮定すると

$(a^{m+1}+b^{m+1})(a+b)=a^{m+2}+a^{m+1}b+ab^{m+1}+b^{m+2}=a^{m+2}+ab(a^m+b^m)+b^{m+2}$

$a^{m+2}+b^{m+2}=(a^{m+1}+b^{m+1})(a+b)-ab(a^m+b^m)$ より $a^{m+2}+b^{m+2}$ も4で割り切れる —③

②③より数学的帰納法より 題意は示された