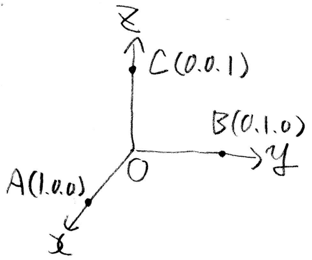
東大文科 1997前期 ③



$|\overrightarrow{PC}|=|\overrightarrow{PO}|$ を満たす点Pの集合は平面 $z=\frac{1}{2}$

$|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|$ を満たす点Pの集合は平面 $x=y$

よって $|\overrightarrow{PC}|=|\overrightarrow{PO}|$ かつ $|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|$ を満たす点Pの集合は直線 $x=y,\ z=\frac{1}{2}$

この上の点 $(t, t, \frac{1}{2})$ とOの距離は $\sqrt{t^2+t^2+\frac{1}{4}}=\sqrt{2t^2+\frac{1}{4}}$

〃 Aの距離は $\sqrt{(t-1)^2+t^2+\frac{1}{4}}=\sqrt{2t^2-2t+\frac{5}{4}}$

よって $\sqrt{2t^2-2t+\frac{5}{4}}=r\sqrt{2t^2+\frac{1}{4}}$, $2t^2-2t+\frac{5}{4}=2r^2t^2+\frac{1}{4}r^2$, $(2r^2-2)t^2+2t+\frac{1}{4}r^2-\frac{5}{4}=0$ —① を満たすtが2つ存在すればよい。

$r=1$ のとき ①は $t=\frac{1}{2}$ となるから不適

$r\neq 1$ のとき、tについての2次方程式①が異なる2つの実数解を持てばよいから

$1-(2r^2-2)(\frac{1}{4}r^2-\frac{5}{4})>0$, $-\frac{1}{2}r^4+3r^2-\frac{3}{2}>0$, $r^4-6r^2+3<0$

$r^4-6r^2+3=0$ のとき $r^2=3\pm\sqrt{9-3}=3\pm\sqrt{6}$ より $3-\sqrt{6}<r^2<3+\sqrt{6}$, $r>0$ より $\sqrt{3-\sqrt{6}}<r<\sqrt{3+\sqrt{6}}$ であればよい。

よって $\sqrt{3-\sqrt{6}}<r<\sqrt{3+\sqrt{6}}$ ただし $r\neq 1$

このとき $t=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-(2r^2-2)(\frac{1}{4}r^2-\frac{5}{4})}}{2r^2-2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{-\frac{1}{2}r^4+3r^2-\frac{3}{2}}}{2r^2-2}$

2点の座標は $\left(\dfrac{-1\pm\sqrt{-\frac{1}{2}r^4+3r^2-\frac{3}{2}}}{2r^2-2},\ \dfrac{-1\pm\sqrt{-\frac{1}{2}r^4+3r^2-\frac{3}{2}}}{2r^2-2},\ \dfrac{1}{2}\right)$