東大文科 1997前期 ④

$\frac{2}{3}t-\frac{2(t^2+t+1)}{3(t+1)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{t(t+1)-(t^2+t+1)}{t+1}=-\frac{2}{3(t+1)}$ より

直線ABの方程式は $y+2t=\frac{-2t+2}{-\frac{2}{3(t+1)}}\left(x-\frac{2}{3}t\right)$, $y+2t=\frac{3}{\cancel{2}}(t+1)\cancel{2}(t-1)\left(x-\frac{2}{3}t\right)$

$y+\cancel{2t}=3xt^2-2t^3-3x+\cancel{2t}$. $2t^3-3xt^2+3x+y=0$ —①

tについての3次方程式①が $0\leqq t\leqq 1$ の範囲に解を持つような (x,y) の範囲を求めればよい.

$f(t)=2t^3-3xt^2+3x+y$ とする. $f'(t)=6t^2-6xt$, $f'(t)=0$ のとき $t(t-x)=0$. $t=0,x$

(i) $x=0$ のとき

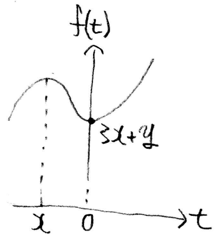
①は $2t^3+y=0$. $t^3=-\frac{y}{2}$ となるから $0\leqq -\frac{y}{2}\leqq 1$. $-2\leqq y\leqq 0$ であればよい.

(ii) $x<0$ のとき

t	…	x	…	0	…
$f'(t)$	+	0	−	0	+
$f(t)$	↗	$-x^3+3x+y$	↘	$3x+y$	↗

$f(t)$ の増減表は左表

$f(t)$ のグラフは右図



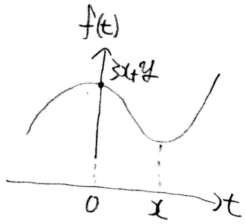
よって $3x+y\leqq 0$ かつ $f(1)\geqq 0$, $y\leqq -3x$ かつ $2+y\geqq 0$, $y\leqq -3x$ かつ $y\geqq -2$ であればよい.

(iii) $x>0$ のとき

t	…	0	…	x	…
$f'(t)$	+	0	−	0	+
$f(t)$	↗	$3x+y$	↘	$-x^3+3x+y$	↗

$f(t)$ の増減表は左表

$f(t)$ のグラフは右図

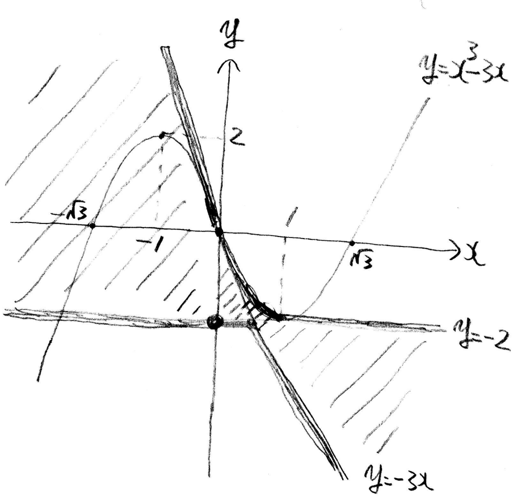


よって $3x+y\geqq 0$ かつ $f(1)\leqq 0$, $y\geqq -3x$ かつ $2+y\leqq 0$, $y\geqq -3x$ かつ $y\leqq -2$

または, $3x+y\leqq 0$ かつ $f(1)\geqq 0$, $y\leqq -3x$ かつ $2+y\geqq 0$. $y\leqq -3x$ かつ $y\geqq -2$

または, $3x+y\geqq 0$ かつ $f(1)\geqq 0$ かつ $0\leqq x\leqq 1$ かつ $-x^3+3x+y\leqq 0$, $y\geqq -3x$ かつ $y\geqq -2$ かつ $0\leqq x\leqq 1$ かつ $y\leqq x^3-3x$

であればよい.



$g(x)=x^3-3x$ とする. $g'(x)=3x^2-3$ $g'(x)=0$ のとき $x=\pm 1$

x	…	-1	…	1	…
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	2	↘	−2	↗

$g(x)$ の増減表は左表

$y=-3x$ と $y=x^3-3x$ の交点は

$-3x=x^3-3x$. $x=0$. $y=0$ より $(0,0)$

以上より求める範囲は左図の斜線部

境界線上の点含む