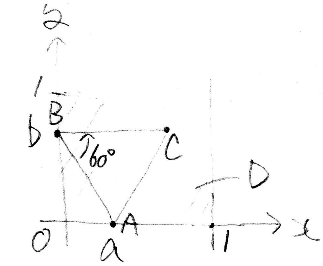
東大理科　1997前期　①



(1) $\overrightarrow{BA}=(a,-b)$

Cは$\overrightarrow{BA}$をBを中心に$\frac{\pi}{3}$回転したときのAであるから、Cの座標は

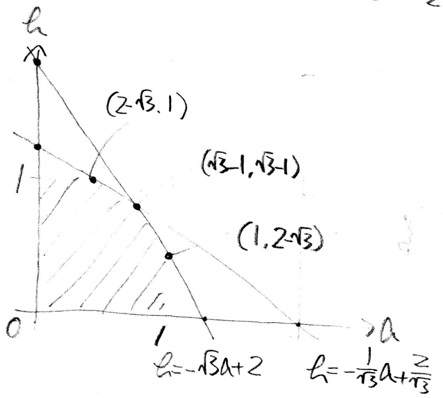
$$\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3}, & -\sin\frac{\pi}{3}\\\sin\frac{\pi}{3}, & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b\\\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{1}{2}b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b\\\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b\end{pmatrix}$$

$0\leqq\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b$ かつ $\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b\leqq1$, $b\geqq-\frac{1}{\sqrt{3}}a$ かつ $b\leqq-\frac{1}{\sqrt{3}}a+\frac{2}{\sqrt{3}}$ —①

$0\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b$ かつ $\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b\leqq1$, $b\geqq-\sqrt{3}a$ かつ $b\leqq-\sqrt{3}a+2$ —②

①,②, $0\leqq a\leqq1$, $0\leqq b\leqq1$ であればよいから

(a,b)の範囲は左図のようになる。



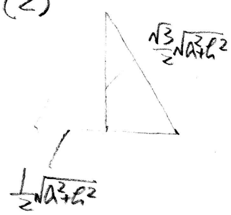
$-\sqrt{3}a+2=-\frac{1}{\sqrt{3}}a+\frac{2}{\sqrt{3}}$

$-3a+2\sqrt{3}=-a+2$

$2\sqrt{3}-2=2a$　$a=\sqrt{3}-1$

$b=-\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)+2=-3+\sqrt{3}+2=\sqrt{3}-1$

(2)



1辺の長さが$\sqrt{a^2+b^2}$の正三角形の面積は

$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2)$ であるから、

a^2+b^2が最大となるような(a,b)を求めればよい。

(1)より、a^2+b^2が最大となり得るのは

$(a,b)=(2-\sqrt{3},1),(\sqrt{3}-1,\sqrt{3}-1),(1,2-\sqrt{3})$

のどれかであり、

$(a,b)=(2-\sqrt{3},1),(1,2-\sqrt{3})$のとき

$a^2+b^2=4-4\sqrt{3}+3+1=8-4\sqrt{3}$,

$(a,b)=(\sqrt{3}-1,\sqrt{3}-1)$のとき

$a^2+b^2=2(3-2\sqrt{3}+1)=8-4\sqrt{3}$

であるから、

求める(a,b)は$(a,b)=(2-\sqrt{3},1),(\sqrt{3}-1,\sqrt{3}-1),(1,2-\sqrt{3})$

このときのSの値は$\frac{\sqrt{3}}{4}(8-4\sqrt{3})=-3+2\sqrt{3}$