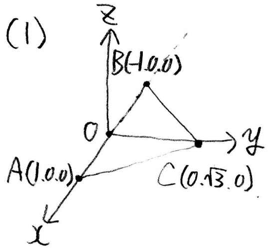
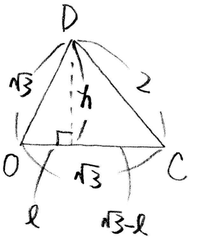
東大文科　1998前期 ④

(1)



正四面体ABCDの1辺の長さは2



正四面体ABCDの平面$y=0$での断面は左図のようになるから

$\begin{cases} h^2+l^2=3 \\ h^2+(-l+\sqrt{3})^2=4. \end{cases}$　$\cancel{-l^2}+3+\cancel{l^2}-2\sqrt{3}l+3=4$　$2\sqrt{3}l=2.$　$l=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$h^2+\frac{1}{3}=3.$　$h^2=\frac{8}{3}$　$h=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

よって点Dの座標は $\left(0.\frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$

直線ODの大きさが1の方向ベクトルは $\dfrac{\left(0.\frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)}{\sqrt{\frac{3}{9}+\frac{24}{9}}}=\left(0.\frac{1}{3}.\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ より

直線OD上にありOからの距離が$\frac{\sqrt{3}}{3}$でありz座標が正の点Fの座標は $\frac{\sqrt{3}}{3}\left(0.\frac{1}{3}.\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\left(0.\frac{\sqrt{3}}{9}.\frac{2\sqrt{6}}{9}\right)$

$\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{BD}=\left(0.\frac{4\sqrt{6}}{3}.-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ より 平面ABDに垂直な直線の大きさが1の方向ベクトルは $\dfrac{(0.2\sqrt{2}.-1)}{\sqrt{8+1}}=\left(0.\frac{2\sqrt{2}}{3}.-\frac{1}{3}\right)$

$$\begin{array}{cccc} -1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2\sqrt{6}}{3} & -1 \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2\sqrt{6}}{3} & 1 \\ \hline -\frac{2\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{4\sqrt{6}}{3} & \end{array}$$

点Eは平面ABDに垂直でFを通る直線上にありFからの距離が$\frac{2\sqrt{6}}{3}$でy座標が負であるから

点Eの座標は $\left(0.\frac{\sqrt{3}}{9}.\frac{2\sqrt{6}}{9}\right)-\frac{2\sqrt{6}}{3}\left(0.\frac{2\sqrt{2}}{3}.-\frac{1}{3}\right)=\left(0.\frac{\sqrt{3}}{9}-\frac{8\sqrt{3}}{9}.\frac{2\sqrt{6}}{9}+\frac{2\sqrt{6}}{9}\right)=\left(0.-\frac{7\sqrt{3}}{9}.\frac{4\sqrt{6}}{9}\right)$

(2) 直線DEの方程式は $\left(0.\frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)+k\left(0.-\frac{7\sqrt{3}}{9}-\frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{4\sqrt{6}}{9}-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)=\left(0.\frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)+k\left(0.-\frac{10\sqrt{3}}{9}.-\frac{2\sqrt{6}}{9}\right)$

$\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{10\sqrt{3}}{9}k=0$ のとき　$\frac{10}{3}k=1$　$k=\frac{3}{10}$

直線DEと平面$y=0$の交点Gのz座標は $\frac{2\sqrt{6}}{3}-\frac{\cancel{3}}{\cancel{10}_5}\frac{2\sqrt{6}}{\cancel{9}_3}=\frac{10-1}{15}\sqrt{6}=\frac{3\sqrt{6}}{5}$

正四面体ABDEの$y\leqq 0$の部分は，底面が$\triangle ABG$，高さが$\frac{7\sqrt{3}}{9}$の三角錐であるから

これの体積は $\cancel{2}\frac{3\sqrt{6}}{5}\frac{1}{\cancel{2}}\frac{7\sqrt{3}}{9}\frac{1}{\cancel{3}}=\frac{7\sqrt{2}}{15}$