東大理科　1998前期　①

$a-\dfrac{1}{a}=\alpha$ とおく．$f(x)=(3x^2-4)(x-\alpha)$，$f'(x)=6x(x-\alpha)+3x^2-4=9x^2-6\alpha x-4$

$9\alpha^2+36>0$ より，x についての2次方程式 $f'(x)=0$ は異なる2つの実数解を持つから，これらを A, B $(A<B)$ とすると
$f(x)$ は $x=A$ で極大値，$x=B$ で極小値を持つ．

$f(A)-f(B)=(3A^2-4)(A-\alpha)-(3B^2-4)(B-\alpha)=3A^3-3\alpha A^2-4A+\cancel{4\alpha}-3B^3+3\alpha B^2+4B-\cancel{4\alpha}=3(A^3-B^3)-3\alpha(A^2-B^2)-4(A-B)$

$(A-B)^3=A^3-3A^2B+3AB^2-B^3=A^3-B^3-3AB(A-B)$ より $A^3-B^3=(A-B)^3+3AB(A-B)$ であるから

$f(A)-f(B)=3(A-B)^3+9AB(A-B)-3\alpha(A+B)(A-B)-4(A-B)=\{3(A-B)^2+9AB-3\alpha(A+B)-4\}(A-B)$

$A+B=\dfrac{2}{3}\alpha$，$AB=-\dfrac{4}{9}$　$(A-B)^2=(A+B)^2-4AB=\dfrac{4}{9}\alpha^2+\dfrac{16}{9}=\dfrac{4}{9}(\alpha^2+4)$，$A-B=-\dfrac{2}{3}\sqrt{\alpha^2+4}$ より

$f(A)-f(B)=-\dfrac{2}{3}\left(\cancel{\dfrac{4}{3}\alpha^2}+\dfrac{16}{3}-4-2\alpha^2-4\right)\sqrt{\alpha^2+4}=-\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{2}{3}\alpha^2-\dfrac{8}{3}\right)\sqrt{\alpha^2+4}=\dfrac{4}{9}(\alpha^2+4)\sqrt{\alpha^2+4}$

よって $\alpha=0$，$a-\dfrac{1}{a}=0$　$a^2=1$，$a=\pm1$ のとき 極大値と極小値の差が最小となる．