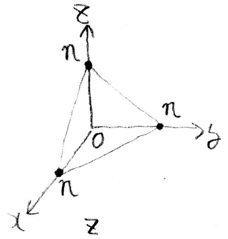
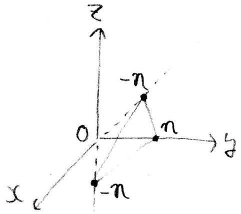
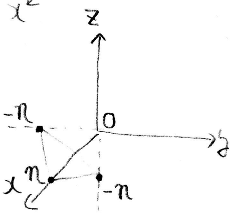
東大理科　1998前期 ②



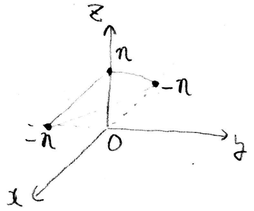
$x+y+z=n$
x軸との交点は $x=n$
y軸 〃 $y=n$
z軸 〃 $z=n$



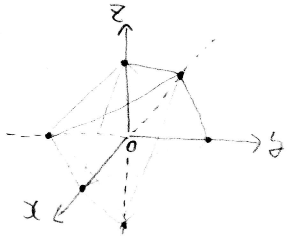
$-x+y-z=n$
x軸との交点は $x=-n$
y軸 〃 $y=n$
z軸 〃 $z=-n$



$x-y-z=n$
x軸との交点は $x=n$
y軸 〃 $y=-n$
z軸 〃 $z=-n$



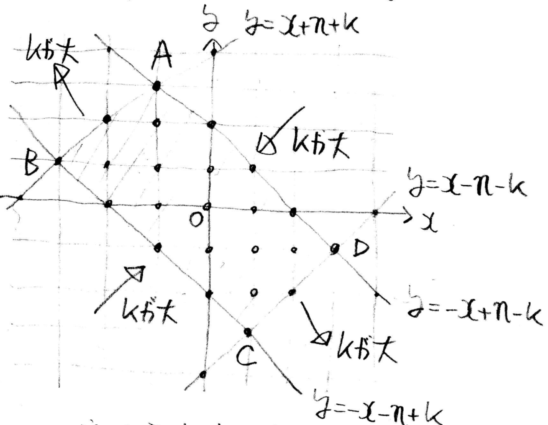
$-x-y+z=n$
x軸との交点は $x=-n$
y軸 〃 $y=-n$
z軸 〃 $z=n$



連立不等式を満たす立体を、平面 $z=k$ で切ったときのセクリロを考える。

$$\begin{cases} x+y+k\leqq n \\ -x+y-k\leqq n \\ x-y-k\leqq n \\ -x-y+k\leqq n \end{cases} \qquad \begin{cases} y\leqq -x+n-k \\ y\leqq x+n+k \\ y\geqq x-n-k \\ y\geqq -x-n+k \end{cases}$$

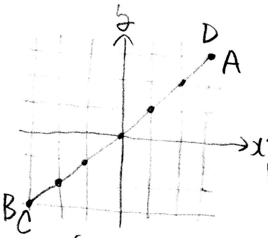
これらを満たす領域は左下図の斜線部になる。



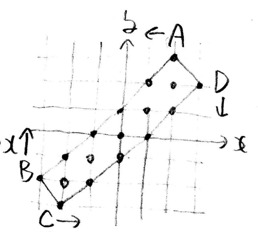
左図のA.B.C.Dの座標は

$x+n+k=-x+n-k$，$2x=-2k$．$x=-k$．$y=-k+n+k=n$ より
$A(-k,n)$
$x+n+k=-x-n+k$，$2x=-2n$．$x=-n$．$y=-n+n+k=k$ より
$B(-n,k)$
$x-n-k=-x-n+k$，$2x=2k$．$x=k$．$y=k-n-k=-n$ より
$C(k,-n)$
$x-n-k=-x+n-k$，$2x=2n$．$x=n$．$y=n-n-k=-k$ より
$D(n,-k)$

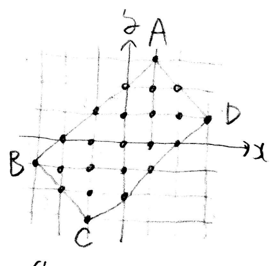
※ $n=3$，$k=1$ のとき



($k=-n$ のとき)

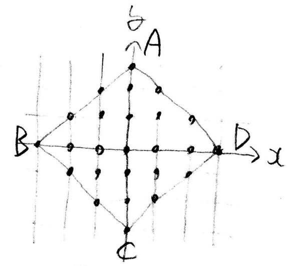


($k=-n+1$ のとき)



($k=-n+2$ のとき)

…



($k=0$ のとき)

上図より $f(n)=2\sum_{k=1}^{n}\{k(2n+2-k)+(k-1)(2n+1-k)\}+2n+1+2\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$

$=2\sum_{k=1}^{n}(2nk+2k-k^2+2nk+k-k^2-2n-1+k+2k-1)+2n+1$

$=2\sum_{k=1}^{n}\{-2k^2+(4n+6)k+(-2n-2)\}+2n+1=-4\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(8n+12)\frac{1}{2}n(n+1)+(-4n-4)n+2n+1$

$=(-\frac{2}{3}n^2-\frac{2}{3}n)(2n+1)+(4n+6)(n^2+n)-4n^2-4n+2n+1=-\frac{4}{3}n^3-\frac{2}{3}n^2-\frac{4}{3}n^2-\frac{2}{3}n+4n^3+4n^2+6n^2+6n-4n^2-2n+1$

$=\frac{8}{3}n^3+4n^2+\frac{10}{3}n+1$

$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^3}=\frac{8}{3}$